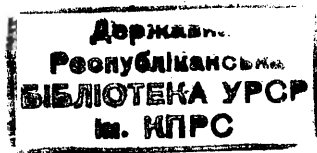


В книге дается характеристика сущности сейш и сейшеобразных колебаний, излагается теория явления, рассказывается о методах исследований и расчетов элементов сейш, описываются сейши на различных озерах нашей страны. В работе используются данные непосредственных наблюдений над уровнем воды в озерах, результаты расчетов, основанных на теоретических выводах, данные лабораторных исследований сейш на моделях озер.

Книга предназначена для широкого круга гидрологов, географов, а также для преподавателей вузов и может быть использована в качестве учебного пособия студентами при изучении курса гидрологии озер.



Арсеньева Нина Михайловна, Давыдов Лев Константинович,
Дубровина Лидия Николаевна, Конкина Нина Георгиевна

Сейши на озерах СССР

Редактор Т. И. Петровская

Техн. редактор Г. П. Жабко

Корректоры Б. С. Горохова и Т. И. Проскуракова

Сдано в набор 19 VII 1963 г. М-19511. Подписано к печати 15 XI 1963 г.
Уч.-изд. л. 11,32. Печ. л. 11,5. Бум. л. 5,75. Формат бум. 60×90¹/₁₆.

Тираж 800 экз. Заказ 551. Цена 57 к.

Тематический план 1963 г. № 50

Типография ЛОЛГУ. Ленинград, Университетская наб., 7/9.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Отечественная литература о сейшах и сейшеобразных колебаниях крайне бедна и насчитывает не более 20 работ, по преимуществу небольших статей. Следует, однако, заметить, что в капитальных трудах по теоретической гидромеханике Н. В. Розе, И. А. Кибеля, Н. Е. Кочина и Л. Н. Сретенского можно найти подробное и строгое изложение современной теории сейш. В то же время фактические данные, результаты натурных наблюдений, проверка существующих методов расчета элементов сейш, экспериментальные исследования представлены в нашей литературе весьма слабо. В ряде работ гидрологическое значение сейш и сейшеобразных колебаний не оценивается в должной мере.

Между тем за рубежом существует огромная литература по этим вопросам. Еще в 1906 г. английский ученый Кристалл в своем оригинальном теоретическом исследовании приводит обширный список литературы по сейшам. В последующие годы в капитальных трудах по океанографии, как, например, в книге А. Дефанта „Физическая океанография“, опубликованной на английском языке, в книге Хатчинсона „Лимнология“, Дж. Стокера „Волны на воде“, достаточно широко освещена как теоретическая сторона явления, так и описаны методы расчетов и дана подробная гидрологическая оценка сейш.

Большое число отдельных, иногда весьма основательных исследований были опубликованы на английском, немецком, французском и японском языках.

Настоящая монография ставит своей задачей восполнить пробел в нашей гидрологической литературе по сейшам. В ней читатель найдет изложение существующих теорий указанного явления, описание методов исследований, проверку методов расчета элементов сейш по натурным данным, сведения о сей-

ах на ряде озер нашей страны, основанные на материалах фактических наблюдений, и, наконец, результаты лабораторных экспериментов с моделями некоторых озер.

Отдельные разделы этой книги написаны следующими авторами: ассистентом Н. М. Арсеньевой — „Сейши Белого озера“; юф. Л. К. Давыдовым — „Введение“, „Методы исследований сейш на конкретных озерах“, „Теория сейш“, „Методы расчётов элементов сейш“, „Сейши на озерах Ладожском, Онежском, Эвоне, Байкале и на Аральском море“; старшим лаборантом Н. Дубровиной — „Сейши Чудско-Псковского озера“; доктором Н. Г. Конкиной — „Гидрологическое значение сейш“, „Сейши озёр Иссык-Куль, Балхаш и Телецкого“.

Материалами для настоящего исследования послужили литературные источники, записи самописцев уровня на ряде озер, преимущественно крупных, и, наконец, лабораторные работы, произведённые в лаборатории кафедры гидрологии суши географического факультета Ленинградского университета.

Сооружение моделей озёр, конструирование и установка оборудования на моделях для непрерывной регистрации колебаний уровня при искусственно возбуждаемых сейшах, проведение опытов производилось преимущественно лаборантом Е. Золотаревым при участии ассистента Н. М. Арсеньевой под общим руководством проф. Л. К. Давыдова.

ВВЕДЕНИЕ

Известно было замечено, что на озерах наблюдаются колебания уровней, близкие к периодическим, при которых уровень в одной части озера поднимается, в другой — опускается. Такие колебания в различных странах назывались по-разному. Жители побережья оз. Леман (Женевское) называли их *seiches*, в районе оз. Большена (Апеннинский полуостров) — *il lago*, в Норвегии — *floing*, в Швеции, вокруг оз. Феттер, — *lunken*. Форель [66], детально изучивший это явление на Женевском озере, ввел в научный обиход для его обозначения термин сейша.

Сейши — это стоячие волны, возникающие под воздействием каких-либо внешних сил. Если сила прекращает действие, то возникающие при этом колебания называются свободными. Они постепенно затухают под влиянием трения. Такие колебания водной массы озера и представляют собой сейши в чистом виде.

При нагонах и сгонах в одном конце озера происходит повышение уровня (нагон) или понижение (сгон). Образуется система течений, под влиянием которых возникают колебания водной массы озера. Если при формировании сгонов или нагонов ветер, вызвавший это явление, продолжает дуть, то возникающие при этом колебания представляют собой уже не свободные, а так называемые автоколебания. Эти последние А. В. Караушев [21] называет сгонно-нагонными периодическими колебаниями; в ранней советской литературе они называются сейшеобразными [10]. Для этих колебаний характерно, что они, в отличие от свободных колебаний или сейш, не проявляют тенденции к затуханию, а иногда, наоборот, размах их увеличивается в результате увеличения скорости ветра.

При сейшах колеблется вся водная масса. В этом одно из коренных отличий сейш от поступательных ветровых волн, при которых колебания охватывают толщу воды на глубину, равную длине волн.

Водная поверхность при сейшах колеблется вокруг одной или нескольких линий, пересекающих эту поверхность. Эти линии называются узловыми, а точки на них — уз-

ми. Одним из элементов сейш является амплитуда-колебаний, причем под амплитудой понимается максимальное отклонение уровня водной поверхности от ее положения в состоянии покоя. Амплитуды колебаний в узловых линиях равны нулю, т. е. частицы воды, находящиеся в узлах, совершают вертикальных перемещений. По обе стороны от узловых линий амплитуды вертикальных колебаний частиц увеличиваются и на некоторых линиях достигают максимума. Эти линии называются линиями пучностей, а точки на них — пучностями. Если на поверхности водоема при сейше образуется одна узловая линия, то такая сейша назы-

вается одноузловой, или унодальной сейшей. При одноузловой сейше уровень воды у одного берега попеременно опускается, у другого — поднимается, частицы же воды движутся взад и вперед по кривым линиям, изогнутым вниз (рис. 1, а). Но иногда на по-

верхности воды возникают две, три и более узловых линий. В таком случае сейши называются двухузловыми, трехузловыми и т. п. При двухузловых сейшах уровень воды в одной части озера поднимается, а у берегов опускается и наоборот. Частицы воды движутся в этом случае под вершиной одной подошвой волны вверх и вниз, а под узлами более или менее горизонтально (рис. 1, б). Многоузловые сейши редко имеют более шести узлов. По данным Хатчинсона [71], на оз. Лох-Ломонд (Шотландия) были отмечены шестнадцатиузловые сейши. При сейшах все частицы воды, расположенные по одной стороне узловой линии, всегда находятся в одной и той же фазе. Частицы же воды, расположенные по другую сторону узловой линии, — в прямо противоположной. В этом заключается еще одно существенное отличие сейш от ветровых поверхностных волн, при которых частицы воды, находящиеся в различных частях водоема, могут быть в любой момент времени в самых разных фазах.

Основными элементами сейши (стоячей волны) являются: период и частота колебаний, амплитуда, высота (разность между наивысшим и наименьшим уровнями) и длина волны. Для волн — расстояние между двумя пучностями одного узла (подъем — подъем, опускание — опускание). Очевидно, на одноузловой сейши равна двойной длине озера. Теория сейш, данные наблюдений на озерах, исследования и на моделях показывают, что чем больше узлов у сейши, тем меньше ее амплитуда.

ГЛАВА I

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ СЕЙШ
НА КОНКРЕТНЫХ ОЗЕРАХ

Казалось бы, что наиболее простым методом исследований сейш на отдельных озерах является метод непосредственных наблюдений над уровнем воды. Естественно, что при различной длительности периодов сейш от нескольких минут до нескольких часов необходима непрерывная регистрация уровня воды при помощи самописцев уровня. В настоящее время имеется несколько видов такого рода самописцев, обладающих высокими качествами. К их числу относится самописец „Валдай“, принятый на станциях гидрометеорологической службы. В случае необходимости регистрации микроколебаний уровня удобно пользоваться микролимниграфом, сконструированным В. П. Матвеевым.

Однако исследования сейш при помощи самописцев уровня с последующей обработкой лент является далеко не простым делом.

Первое затруднение, с которым встречается исследователь, приступающий к изучению сейш на каком-либо озере, заключается в выборе места для установки самописцев. Предварительно необходимо, пользуясь существующими, хотя бы приближенными, методами, установить расположение узловых линий по крайней мере для двух сейш — одноузловой и двухузловой. Лимниграф, установленный на узловой линии одноузловой продольной сейши, не будет регистрировать одноузловые сейши, амплитуды которых обычно бывают наиболее значительными. Самописец же, установленный на узловой линии двухузловой сейши, не зарегистрирует этой последней.

Неудачно выбранное для установки лимниграфа место может привести к неверным выводам относительно сейш, возникающих на озере. Во всех случаях необходимо при обработке лент самописца уровня в целях изучения сейш прежде

его установить положение лимниграфа относительно узловых ний. Это облегчит обработку лент и поможет сделать правильные выводы относительно видов сейш. Можно привести следующий пример, подтверждающий справедливость сказанного. На оз. Севан самописец, установленный в бухте Глазьев, располагался примерно на узловой линии одноузловой продольной сейши. Вот почему на лентах этого самописца было трудно подметить существование одноузловой сейши, в то время как лимниграф, установленный в сел. Еленовка в северо-западной части озера, весьма отчетливо фиксировал эту сейшу с периодом в 125 мин и амплитудой около 25 см. Вместе с тем на лентах самописца часто можно было проследить наличие сейш с периодами 30 и 57 мин. Одна из них представляла собой двухузловую продольную сейшу, другая — поперечную одноузловую. Это удалось установить только в результате тщательного анализа лент обоих самописцев и сопоставления результатов этого анализа с данными, полученными из теоретических расчетов.

Кроме предварительных расчетов периодов сейш, при выборе места для установки лимниграфов необходимо тщательно изучить очертание берегов. Следует избегать замкнутых бухт и заливов, сообщение которых с общей акваторией затруднено, так как в них возможна интерференция волн сейш этого водоема и сейш, возникающих в бухтах или заливах. В затрудненном сообщении бухты с озером сейша самого водоема может быть весьма слабо выражена в данной бухте. Интерференция различных сейш может создать настолько запутанные записи самописца уровня, что обработка их будет крайне затруднена. В Женевском озере Форель часто наблюдалась комбинация одноузловых и двухузловых сейш, которые называли дикротными (dicrote seiche).

Обработка лент лимниграфа представляет собой несложную, достаточно громоздкую и кропотливую операцию. При обработке таких лент решаются несколько задач: устанавливаются типы сейш (одноузловые, двухузловые и т. п., продольные и поперечные), определяются периоды сейш, амплитуды их колебаний.

Если запись колебаний уровня на ленте самописца носит только простой характер, причем на ленте отчетливо видны отдельные волны одноузловой сейши, то способ определения периода такой сейши очень прост. Выбирается часть кривой, отраженной на одной или нескольких лентах с возможным наибольшим числом волн сейши, определяется промежуток времени между первым и последним на этой кривой максимумом или минимумом уровня (t), подсчитывается число волн (N) и делением t на N вычисляется период T_1 . Такие расчеты можно произвести несколько раз. Описанный прием дает хорошие результаты только в том случае, если запись на ленте

носит сравнительно простой характер и не представляет собой интерференцию нескольких сейш.

Более надежным является применение метода Бюи-Балло,¹ сущность которого заключается в следующем. Предварительно, при помощи одного из простейших методов, например по формуле Мериана, рассчитывается период одноузловой сейши. Предположим, что этот период оказался равным T' минут. Так как обычно горизонтальный масштаб ленты таков, что одному делению ее шкалы соответствует промежуток времени в 10 мин, то, очевидно, надежно можно определить по ленте уровни через 5 мин. В таком случае полученный период T' будет содержать $N = \frac{T'}{5}$ пятиминутных промежутков времени. Снимаем с ленты уровни воды (можно в превышениях над каким-либо условным уровнем) за промежуток времени, равный 10 T' , или 20 T' мин. Уровни будем снимать с ленты, начиная с первого максимума или минимума и кончая последним максимумом или минимумом. Каждая волна будет содержать N уровней и N пятиминутных промежутков времени. Обозначим уровни первой волны через: $U_1, U_2, U_3, \dots, U_N$, второй волны — $U_{N+1}, U_{N+2}, \dots, U_{2N}$ и т. д.

Удобно для дальнейшей обработки разместить эти уровни в табл. 1.

Таблица 1

Уровни, снятые с ленты самописцев										
Десятки	Уровень									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	U_8	U_9	U_{10}
10	U_{11}	U_{12}	U_{13}	U_{14}	U_{15}	U_{16}	U_{17}	U_{18}	U_{19}	U_{20}

Пользуясь данными табл. 1, нужно далее составить табл. 2, каждая строка которой включает в себя N уровней, т. е.

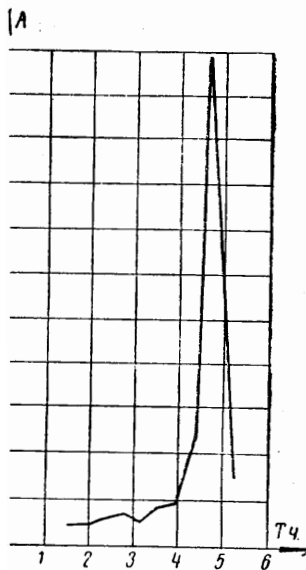
Таблица 2

Таблица для испытания периода сейши T'					
Номер волны	Уровень				
	1	2	3	$N-1$	N
1	U_1	U_2	U_3	U_{N-1}	U_N
2	U_{N+1}	U_{N+2}	U_{N+3}	U_{2N-1}	U_{2N}

¹ Подробное изложение этого метода можно найти в статье А. А. Саткевича [46].

овни одной волны сейши, период которой принят равным T нутам.

Сложив все уровни каждого столбца полученной таблицы, числим разность между наибольшими и наименьшими значениями этих сумм и обозначим эту разность через A . Составим логичные таблицы для периодов $T' - 4$, $T' - 3$, $T' - 2$, $T' - 1$, $+1$, $T' + 2$, $T' + 3$, $T' + 4$ и вычислим для каждой из этих таблиц разности A . Построим затем график изменений величины A в зависимости от T (рис. 2). Максимальное значение A соответствует истинному значению периода одноузловой сейши. Еvidно, что точность определения периода сейши при пяти-нутном интервале времени составляет $\pm 2,5$ мин. Естественно поэтому, что для сейш со сравнительно малыми периодами уровни для расчета периодов по описанному методу следует брать чаще, чем через 5 мин.



2. График зависимости A от T (оз. Байкал, пос. Лиственничное).

раммы. Затем сложим ординаты обоих графиков. Очевидно, при таком сложении ординаты одноузловой сейши уничтожаются и полученные суммы не будут содержать компоненты периода одноузловой сейши, но в них будут входить компоненты всех остальных сейш, колебания уровня которых и зарегистрированы самописцами в виде первоначальной марной кривой. Следует учесть при этом, что полученные марные ординаты будут вдвое превосходить истинные ординаты остаточной кривой. Эта последняя подвергается такой

Теоретически можно доказать, что в таблице, для которой получилось наибольшее значение A , в суммах уровней каждого вертикального столбца взаимно уничтожились уровни сейш с числом узлов, большим 1. Выделение других периодов, после исключения из лимниграммы уровней одноузловой сейши, можно произвести методом гармонического анализа или повторного применения описанного метода к остаточной кривой, из которой исключены указанные выше уровни.

Эта же задача может быть решена более простым приемом. Представим себе, что период одноузловой сейши определен. Вычертим на восковке копию кривой изучаемой лимниграммы. Затем наложим полученную копию на ленту самописца так, чтобы максимум копии совпадал с минимумом уровня лим-

же обработке (рис. 3), что и первоначальная подлинная лента лимниграфа.

Величины периодов, положение узловых линий сейш с различным числом узлов могут быть рассчитаны при помощи теоретических методов, описание которых дается ниже (гл. III). Во всех случаях необходимо иметь достаточно надежную батиметрическую карту озера, для того чтобы можно было определить основные морфометрические элементы водоема, необходимые для расчетов.

Одни из методов крайне просты (Мериан, Дюбуа), но либо очень неточны, либо применение их ограничено в зависимости от морфометрических особенностей озера. Другие, наоборот, достаточно сложны, как, например, метод Кристалла, и, несмотря на их в той или иной мере теоретическую обоснованность, так как они могут привести к неверным результатам, не учитывают влияния трения, наличия островов, сложности очертаний береговой линии и т. п.

Наиболее надежным методом исследований сейш, и к тому же наиболее дешевым, является метод моделей. Он неоднократно применялся как за рубежом, так и в нашей стране. Этим методом у нас изучались сейши оз. Байкал [47], Балтийского моря [15], Аральского моря [16].

Сущность метода заключается в следующем. Изготавливается модель водоема в искаженном виде в различных вертикальном и горизонтальном масштабах. Затем искусственно возбуждаются сейши либо ритмическими погружениями пластинки в воду, либо качанием маятника, конец которого погружен в воду, либо, наконец, покачиванием модели. Регистрация уровня производится самописцем специальной конструкции.

Продолжительность периода сейши устанавливается так же, как и при обработке обычных лент самописцев: за данный промежуток времени t определяется по ленте число волн сейши N и период вычисляется по формуле $T' = \frac{t}{N}$, где T' — период сейши на модели.

Период сейши естественного водоема, соответствующего данной модели, может быть вычислен по формуле, предложенной В. Н. Соловьевым:



Рис. 3. График последовательного уничтожения волн.

1 — сложные колебания, включающие в себя три сейши (одноузловую, двухузловую и трехузловую); 2 — график колебания уровней после исключения одноузловой сейши с периодом $T_1 = 42,8$ мин.; 3 — график колебания уровней после исключения двухузловой сейши с периодом $T_2 = 28,8$ мин. Трехузловая сейша имеет период $T_3 = 11,8$ мин.

$$T = T' \frac{m}{\sqrt{n}} \frac{1}{1 + \frac{1}{6} \left(\frac{2\pi h}{\lambda} \right)^2} \frac{2\pi}{2\pi + \delta}, \quad (1,1)$$

где $\frac{1}{m}$ — горизонтальный и $\frac{1}{n}$ — вертикальный масштабы модели; h — средняя глубина модели; λ — длина волны сейши, для одноузловой продольной сейши равная двойной длине модели по ее оси; δ — логарифмический декремент затухания. Величина его определяется по записи самописца уровня на модели следующим образом. Предполагается, что затухание колебаний уровня происходит по следующему закону:

$$H_i = H_0 e^{-i\delta}. \quad (1,2)$$

В этой формуле H_0 — начальная максимальная амплитуда первой волны на лимниграмме; H_i — максимальная амплитуда $(i+1)$ -й волны на той же лимниграмме; e — основание натуральных логарифмов; δ — декремент затухания.

Определив по ленте самописца на модели H_0 и H_i , нетрудно, решая уравнение (1,2) относительно δ , получить

$$\delta = - \frac{\lg \frac{H_i}{H_0}}{i \lg e} = \frac{\lg H_0 - \lg H_i}{0,4343i}.$$

Достоинство метода моделей, как это совершенно правильно отметил В. П. Дубов [16], заключается в том, что он позволяет в чистом виде возбудить сейшу любого порядка, наблюдать ее сразу по всему бассейну и наглядно определить положение узловых линий.

Н. И. Арсенева, А. К. Давыдов, А. И. Дубов,
И. Г. Конякин. Сейши на озерах СССР. —
И.: Изд-во Ленинградского университета,
1963. — 184 с.

ГЛАВА II

ТЕОРИЯ СЕЙШ

ИССЛЕДОВАНИЯ МЕРИАНА

Как отмечалось уже выше, сейши представляют собой стоячие волны (свободные колебания). Больше 100 лет тому назад немецкий ученый И. Мериан опубликовал исследование „О движении канальной жидкости в сосудах“ [75]. В этом исследовании впервые рассматриваются стоячие колебания жидкости в сосудах конечной глубины и дается формула для определения периодов таких колебаний, известная в дальнейшем под названием формулы Мериана. Эта формула выведена для случая колебаний в сосуде прямоугольной формы, постоянной глубины. Исследование Мериана носит чисто теоретический характер. В нем о сейшах не упоминается вовсе. Вывод формулы Мериана довольно сложен и, как будет показано дальше, она может быть получена значительно проще (см. стр. 76).

Формула Мериана имеет вид

$$T_n = \frac{2L}{n \sqrt{gh}}, \quad (2,1)$$

где n — число узлов; T_n — период n -узловой сейши; L — длина сосуда; h — глубина; g — ускорение силы тяжести.

Исследования Мериана прошли незамеченными, и только после работы Фореля [66], посвященной Женевскому озеру, в которой Форель применил формулу Мериана для расчета периодов сейш, они привлекли к себе внимание лимнологов. Примерно в это же время внук Мериана — К. Мюль опубликовал вновь работу Мериана в более совершенном виде.

По существу исследования Мериана не создали теорию сейш, а дали простейший метод расчета периодов стоячих волн в водоеме прямоугольной формы, постоянной глубины. В дальнейшем будет показано, что формуле Мериана можно придать более широкое толкование, чем это делалось прежде (см. стр. 77).

Французским ученым Дюбуа впервые выведена формула для расчета периодов стоячих волн в прямоугольном бассейне переменной глубины. Дюбуа [63] рассматривает стоячие волны в таком бассейне как результат интерференции двух одиночных поступательных волн одинаковой длины и одинакового периода, идущих друг другу навстречу. Дюбуа разбивает продольное сечение рассматриваемого бассейна вертикальными линиями, отстоящими друг от друга на расстоянии a_1, a_2, a_3, \dots .

a_n , на части так, что $\sum_1^n a_i = L$, где L — длина озера. Соответствующие глубины в полученных на оси точках Дюбуа обозначает через $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$.

Скорость распространения волн, о которых говорилось выше, как известно, может быть определена по формуле $v = \sqrt{gh}$.

Принимая среднюю скорость пробега волны на участке a_i равной

$$\frac{\sqrt{gh_{i-1}} + \sqrt{gh_i}}{2},$$

можно считать, что время, потребное для пробега волной этого участка, будет

$$\delta t_i = a_i : \frac{\sqrt{gh_{i-1}} + \sqrt{gh_i}}{2} = \frac{2a_i}{\sqrt{gh_{i-1}} + \sqrt{gh_i}},$$

а время, необходимое для пробега волной всего бассейна, —

$$t = \sum \frac{2a_i}{\sqrt{gh_{i-1}} + \sqrt{gh_i}}.$$

За период стоячей волны (одноузловой сейши) следует принять промежуток времени, в течение которого волна пройдет расстояние, равное своей длине. Длина же волны равна удвоенной длине водоема, а, следовательно, период одноузловой сейши может быть определен по формуле

$$T_1 = \frac{4}{\sqrt{g}} \sum \frac{a_i}{\sqrt{h_{i-1}} + \sqrt{h_i}}. \quad (2,2)$$

Если глубина водоема на всех вертикалях одна и та же, то формула (2,2) принимает вид

$$T_1 = \frac{2L}{\sqrt{gh}},$$

т. е. превращается в приведенную выше формулу Мериана.

Очевидно, формулу (2,2) можно выразить и в виде интеграла

$$T_1 = \frac{2}{\sqrt{g}} \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{h}}. \quad (2,3)$$

Формула Дюбуа позволяет определить и положение узловых линий и пучностей. В случае одноузловой сейши узловая линия будет находиться на таком расстоянии x от начала координат (одного из концов озера), для которого при постепенном суммировании по формуле (2,2) или (2,3) получится $t = \frac{T}{2}$.

В тех же точках, для которых суммирование даст $t = \frac{T}{4}$ или

$t = \frac{3T}{4}$, будут находиться узлы двухузловых сейш.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КРИСТАЛА

Наиболее совершенной теорией сейш до недавнего времени являлась гидродинамическая теория, разработанная Кристалом [58]. Сущность этой теории заключается в следующем.

Кристал рассматривает сейши как свободные колебания и описывает их при помощи дифференциальных уравнений, выведенных без учета трения и геострофического ускорения. Для вывода этих уравнений, следуя Кристалу, возьмем прямоугольную систему координат, начало которых поместим в левом конце водоема, ось X направим вдоль продольной оси озера, ось Y — перпендикулярно к оси X , причем плоскость OXY совместим со спокойной водной поверхностью озера. Ось Z направим вертикально вверх.

Возьмем поперечное сечение озера на расстоянии x от начала координат и обозначим ширину озера в этом сечении в состоянии покоя через b , а площадь этого сечения через A . На расстоянии $x + dx$ от начала координат возьмем второе сечение. Объем воды между этими сечениями равен $A dx$. Предположим, что через некоторый промежуток времени t в результате возникших колебаний водной массы озера наше первое сечение окажется на расстоянии $x + \xi$ от начала координат. Очевидно, что толщина слоя между двумя сечениями будет равна $d(x + \xi) = dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$. Площадь поперечного сечения

также изменится, и ее можно считать состоящей из двух частей: площади сечения на расстоянии $x + \xi$ в состоянии покоя (A') и площади, соответствующей поднятию уровня на некоторую величину η (вертикальное смещение). Если через b' обозначить ширину сечения A' , то, очевидно, общая площадь сечения будет равна $(A' + b'\eta)$, причем η может быть величиной и положительной и отрицательной. Объем слоя между рассматриваемыми сечениями

$$(A' + b'\eta) \left(dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx \right) = (A' + b'\eta) \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx.$$

Этот объем должен быть равен первоначальному объему

$$(A' + b'\eta) \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx = A dx. \quad (2,4)$$

Разложив A' и b' в ряд Тейлора по величине ξ , получим:

$$A' = A + \frac{\partial A}{\partial x} \xi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \xi^2 + \dots$$

$$b' = b + \frac{\partial b}{\partial x} \xi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \xi^2 + \dots$$

Подставив вместо A' и b' найденные выражения в уравнение (2,4), отбросив при этом малые величины высшего порядка и произведя соответствующее приведение, получим

$$\frac{\partial A}{\partial x} \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} A + b\eta = 0.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial A}{\partial x} \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} A = \frac{\partial}{\partial x} (A\xi),$$

можем окончательно записать

$$\frac{\partial}{\partial x} (A\xi) = -b\eta,$$

откуда

$$\eta = -\frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial x} (A\xi). \quad (2,5)$$

Обратимся далее к общим уравнениям движения в форме Лагранжа. Следуя Кристаллу, ограничимся анализом движения в одной плоскости OXZ , т. е. будем решать плоскую задачу. По этой причине мы используем только первое из уравнений Лагранжа, которое, как известно, имеет вид

$$\left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) \frac{\partial x}{\partial a} + \left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \frac{\partial y}{\partial a} + \left(Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) \frac{\partial z}{\partial a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial a}.$$

Единственная внешняя сила, действующая на наш объем водной массы, — сила тяжести. Ее проекции на оси X и Y равны нулю, т. е. $X=0$ и $Y=0$. Проекция же этой силы на ось Z , т. е. Z равна $-g$, так как сила тяжести направлена вниз, а ось Z вверх.

В первом уравнении Лагранжа в нашем случае текущие координаты x и z соответственно заменим $x + \xi$ и $z + \eta$. В этих выражениях x и z представляют собой начальные координаты в первом и третьем уравнениях Лагранжа, т. е. соответствуют величинам a и c . Отметим при этом, что последние, а следо-

вательно, и x и z не зависят от времени. В соответствии со сказанным первое уравнение Лагранжа примет вид

$$\left(0 - \frac{\partial^2 (x + \xi)}{\partial t^2} \right) \frac{\partial (x + \xi)}{\partial x} + \left(0 - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \frac{\partial y}{\partial x} + \left(-g - \frac{\partial^2 (z + \eta)}{\partial t^2} \right) \frac{\partial (z + \eta)}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}.$$

Производные $\frac{\partial y}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial x}$ равны нулю. Величина P медленно изменяется по водной поверхности, и, следовательно, можно принять $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$. Выше уже отмечалось, что начальные координаты не зависят от времени, откуда

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

Произведя дифференцирование в преобразованном уравнении Лагранжа и принимая во внимание нулевые значения указанных выше величин, можно записать

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \left(g + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0.$$

Раскрыв скобки, получим

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0.$$

Отбросив малые величины высшего порядка $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \frac{\partial \xi}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \frac{\partial \eta}{\partial x}$, в итоге будем иметь

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (2,6)$$

Таким образом, мы получили два уравнения: (2,5) и (2,6). Подставим в уравнение (2,6) η из формулы (2,5):

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial x} (A\xi) \right].$$

Умножив обе части уравнения на A , можем записать:

$$A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = Ag \frac{b}{b} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial x} (A\xi) \right]. \quad (2,7)$$

Обозначим $A\xi$ через u , Ab — через σ и введем переменную $v = \int_0^x b dx$. Нетрудно видеть, что v есть площадь водной поверхности озера от начала координат до поперечного сечения.

Очевидно, что v и σ зависят только от x . Примем v за независимую переменную и будем рассматривать σ как функцию от v . Построим график зависимости σ от v . Кристал назвал

этот график нормальной кривой озера. Параметр σ есть, как это было принято ранее, произведение величин площади поперечного сечения и ширины водной поверхности этого сечения. Таким образом, σ представляет собой некоторую морфометрическую характеристику поперечного сечения, а нормальная кривая выражает изменение этой характеристики в зависимости от площади водной поверхности водоема до данного сечения. На рис. 4 показана в качестве примера нормальная кривая оз. Мичиган [62]. Помня, что если $v = \int_0^x b dx$, то $dv = b dx$, и введя принятые обозначения в уравнение (2,5), получим

$$\eta = -\frac{\partial u}{\partial v}. \quad (2,8)$$

В левой части уравнения (2,7) величину A как независимую от времени можно ввести под знак дифференциала, а следовательно,

$$A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 (A\xi)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

где $A\xi = u$.

Таким образом, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Abg \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}$ или, так как $Ab = \sigma$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}. \quad (2,9)$$

Ранее было принято, что $u = A\xi$. Площадь поперечного сечения A можно рассматривать как некоторую функцию от x , а следовательно, и от v . Величина ξ — горизонтальное смещение поперечного сечения при свободных колебаниях водной массы озера — зависит от t , и ее можно рассматривать как гармоническую функцию.

Таким образом, u можно представить в виде функции, одновременно зависящей от v и от t .

$$u = \sum P \sin m(t - \tau). \quad (2,10)$$

Здесь P — некоторая функция от v ; величина m — частота колебаний², причем $m = \frac{2\pi}{T}$, где T — период колебаний; τ — на-

чальная фаза. Величины m , T и τ для каждой сейши постоянные.

Любой член вида $u = P \sin m(t - \tau)$ соответствует отдельному стоячему колебанию. Для простейшей сейши можно отказать от знака суммы и принять

$$u = P \sin m(t - \tau). \quad (2,11)$$

В формуле (2,9) u заменим выражением (2,11) и, производя дифференцирование, получим

$$-Pm^2 \sin m(t - \tau) = g\sigma \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \sin m(t - \tau).$$

Сократив обе части полученного уравнения на $\sin m(t - \tau)$ и перенеся все члены уравнения в одну сторону, получим

$$m^2 P + g\sigma \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} = 0. \quad (2,12)$$

Это и есть основное уравнение Кристала, которое позволяет при определенных условиях найти частоту колебания m , период сейши и положение узловых линий. В самом деле, величина u отличается от величины P лишь множителем $\sin m(t - \tau)$, одинаковым для одного и того же момента времени для всех точек водной поверхности озера, так как этот множитель не зависит от x . Очевидно, что величины u и P принимают нулевые значения при одном и том же значении x , т. е. в одних и тех же поперечных сечениях. Точно так же совпадают места максимальных и минимальных значений u и P .

Обычно на концах озера $u = A\xi = 0$, так как площадь поперечного сечения (A) или горизонтальное смещение ξ равны нулю. Удовлетворять этому пограничному условию уравнение (2,12) будет лишь для некоторых определенных значений m , что и дает возможность определить период сейши, основываясь на известной формуле $T = \frac{2\pi}{m}$ сек.

Как указывалось ранее, сечения, в которых горизонтальные смещения ξ равны 0, называются пучностями. Очевидно, поэтому, что в точках пучностей $u = 0$, откуда и $P = 0$.

В узлах, как известно, вертикальное смещение $\eta = 0$, а так как $\eta = -\frac{\partial u}{\partial v}$, то и $\frac{\partial u}{\partial v} = 0$. Следовательно, в этих точках величины u и ξ достигают максимума и минимума. Кроме того, так как

$$\eta = -\frac{\partial u}{\partial v} = -\frac{\partial P}{\partial v} \sin m(t - \tau), \text{ а в узлах } \eta \text{ и } \frac{\partial u}{\partial v} \text{ равны } 0, \text{ то}$$

$$\text{и } \frac{\partial P}{\partial v} = 0.$$

Указанные выше равенства позволяют определить положение узловых линий на водной поверхности озера (подробнее см. гл. III).

² Здесь, так же как и в дальнейшем, частота колебаний обозначается буквой m , в то время как обычно она обозначается — n . Сделано так для того, чтобы отличить число узлов (n) и знаков у функции Бесселя и Неймана (J_n) и (Y_n) от частоты колебаний m . Нужно иметь в виду, что под m подразумевается так называемая угловая частота колебаний.

Обычно нормальная кривая имеет довольно сложные очертания и не может быть описана аналитически в виде уравнения, выражающего зависимость σ от ν . По этой причине основное уравнение (2,12) не удастся интегрировать в конечном виде. Поэтому задача об определении периодов сейш и положения узловых линий методом Кристалла решается с некоторым приближением. Предлагается нормальную кривую заменять простейшей кривой или ломаной линией, состоящей из отрезков прямых так, чтобы они возможно меньше отличались друг от друга (см. стр. 48), что, конечно, связано с некоторым произволом. В этом один из недостатков теории.

При оценке теории Кристалла нужно принять во внимание еще и следующее обстоятельство. Вывод своих уравнений он получает, решая плоскую (одномерную) задачу. Эти уравнения преобразовываются для частного случая — для водоема постоянной ширины. Полученное в результате этой операции основное уравнение с математической точки зрения ничем не отличается от первоначального, если принять, что глубина водоема отвечает следующему условию: нормальная кривая водоема постоянной ширины в точности совпадает с нормальной кривой фактического водоема. Отсюда Кристалл делает вывод, что основное уравнение его теории может быть применено для расчетов сейш любого водоема путем замены фактического водоема водоемом постоянной ширины, если только соблюдено указанное выше условие. Строго же говоря, этим методом можно пользоваться только для озер постоянной ширины или, в крайнем случае, для озер с мало изменяющейся шириной на всем протяжении водоема.

Вместе с тем нужно признать, что теория Кристалла обладает определенными достоинствами. Она дает в общем правильное представление о сущности явления и, что особенно важно, впервые правильно характеризует соотношение между периодами сейш с различным числом узлов в зависимости от морфометрических особенностей водоемов.

В бассейне прямоугольной формы постоянной глубины отношения между периодами сейш с различным числом узлов, в соответствии с формулой Мериана, будут таковы:

$$T_1 : T_2 : T_3 : \dots : T_n = 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \dots : \frac{1}{n}.$$

Если же вычислить по методу Кристалла периоды сейш с различным числом узлов для бассейнов с разными нормальными кривыми, то соотношения между этими периодами будут характеризоваться данными, приведенными в табл. 3.

В этой таблице период одноузловой сейши прямоугольного бассейна постоянной глубины с нормальной кривой в виде горизонтальной прямой принят за единицу и обозначен через T_0 .

Таблица 3

Соотношения между периодами сейш с различным числом узлов при разных видах нормальных кривых (по Кристаллу)

Вид нормальной кривой	$T_1 : T_0$	$T_2 : T_0$	$T_3 : T_0$	$T_4 : T_0$
Горизонтальная прямая	1,000	0,500	0,333	0,250
Вогнутая парабола	1,110	0,577	0,408	0,316
Выпуклая парабола	0,950	0,474	0,311	0,236
Вогнутая полупарабола	1,050	0,548	0,378	0,289
Две наклонные прямые	1,305	0,628	0,434	0,343

ИССЛЕДОВАНИЯ ЯПОНСКИХ УЧЕНЫХ

В 1906 г., почти одновременно с исследованиями Кристалла, в Японии была опубликована работа четырех японских ученых К. Хонда, Т. Терада, И. Йошида и Д. Изитани [72], посвященная изучению сейш в морских бухтах и заливах. Выводы этой работы могут быть распространены и на озера. Особый интерес представляет случай, не затронутый ни в одном из других исследований сейш, когда два водоема соединяются достаточно узким проливом или каналом. Авторы упомянутого исследования стремились, в сущности говоря, усовершенствовать формулу Мериана, скорректировав ее за счет переменной ширины и площади поперечного сечения озера.

Указанными учеными была предложена следующая формула для расчетов периодов сейш с различным числом узлов:

$$T_n = \frac{1}{n} \frac{2l}{\sqrt{gh}} (1 + K). \quad (2,13)$$

Первый множитель приведенной формулы представляет собой период n -узловой сейши, вычисленный по формуле Мериана, т. е. в предположении, что у данного бассейна и ширина и глубина на всем его протяжении остаются постоянными.

Поправочный коэффициент K японские ученые предлагают в виде суммы двух коэффициентов $K_1 + K_2$, один для учета переменной ширины, другой для учета переменной площади поперечного сечения водоема. Для вычисления этих коэффициентов были предложены следующие формулы:

$$K_1 = \frac{1}{2lb_0} \int_0^l \Delta b(x) \cos \frac{2\pi xn}{l} dx; \quad (2,14)$$

$$K_2 = \frac{1}{2lv_0} \int_0^l \Delta v(x) \cos \frac{2\pi xn}{l} dx. \quad (2,15)$$

Здесь $\Delta b(x) = b(x) - b_0$ и $\Delta v(x) = v(x) - v_0$, где $b(x)$ и $v(x)$ — соответственно ширина и площадь поперечного сечения озера на расстоянии x от начала координат, расположенного на одном из концов водоема, а b_0 и v_0 — средние значения этих величин.

В итоге формула для вычисления периодов n -узловых сейш, предложенная японскими учеными, имеет вид

$$T_n = \frac{1}{n} \frac{2l}{\sqrt{gh}} \left[1 + \frac{1}{2lb_0} \int_0^l \Delta b(x) \cos \frac{2\pi x n}{l} dx + \frac{1}{2lv_0} \int_0^l \Delta v(x) \cos \frac{2\pi x n}{l} dx \right]. \quad (2,16)$$

Для случая, когда озеро представляет собой два водоема, соединенных между собой достаточно узким проливом или каналом, авторами предложена следующая формула

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{vl}{ghh \left(1 + \frac{v}{v_1}\right)}} \left[1 + \frac{2b}{\pi l} \left(\frac{3}{2} - \gamma - \lg \frac{\pi b}{\sqrt{\lambda \lambda'}} \right) \right]. \quad (2,17)$$

В этой формуле v — площадь водной поверхности первого (или второго)³ озера; v' — площадь водной поверхности второго (или первого) озера; l — длина; b — ширина; h — глубина (средняя) канала или пролива, соединяющих оба водоема; γ — постоянная Маскерони, равная 0,5772; λ и λ' — длины волн в первом и втором озерах, которые можно принять равными двойным длинам каждого водоема.

Если в формулу (2,17) подставить численные значения π и g , приняв $g = 9,81$ м/сек, и заменить $\lambda = 2L$ и $\lambda' = 2L'$, где L и L' — длины каждого из озер, то после простейших преобразований формула (2,17) примет вид

$$T_1 = 6,283 \sqrt{\frac{vl}{bh \left(1 + \frac{v}{v'}\right)}} \left[1 + 0,637 \frac{b}{l} \left(0,527 + \lg \frac{\sqrt{LL'}}{b} \right) \right]. \quad (2,18)^4$$

³ Нетрудно убедиться в том, что $\frac{v}{1 + \frac{v}{v'}} = \frac{v'}{1 + \frac{v'}{v}}$, т. е. безраз-

лично, какое озеро считать первым, какое вторым. В самом деле, $\frac{v}{1 + \frac{v}{v'}} = \frac{vv'}{v' + v} = \frac{v'}{1 + \frac{v'}{v}}$.

⁴ В этой формуле, так же как и в предыдущих формулах японских ученых, в целях единообразия в написании ряда других формул площади водной поверхности обозначены буквой v , в то время как у указанных авторов эти площади обозначаются буквой s .

Со времени опубликования гидромеханической теории сейш Кристала прошло более 50 лет. За это время трудами советских и зарубежных ученых теория сейш получила значительное развитие. Подробное изложение этой теории можно найти в монографиях Н. Е. Кочина, И. А. Кибеля и Н. В. Розе [25], Л. Н. Сретенского [49], Дж. Стокера [50], Дж. Праудмена [42] и др.

В современной теории сейши по-прежнему рассматриваются как свободные колебания водной массы в результате воздействия на нее какой-либо мгновенной силы. Характерным является введение понятия потенциала скорости, аналогичного понятию потенциала силы. Под потенциалом скорости понимают некоторую функцию $\varphi(x, y, z, t)$, удовлетворяющую равенствам

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{и} \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (2,19)$$

Начало координат находится при этом на спокойной водной поверхности озера в левом его конце, ось z направлена вверх, нормально к водной поверхности в ее спокойном состоянии, оси X и Y находятся на горизонтальной плоскости на водной поверхности озера.

При существовании потенциала скорости уравнение неразрывности превращается в уравнение Лапласа

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Это уравнение в силу равенств (2,19) можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Наиболее просто решается задача для случая плоской волны водоема постоянной глубины. Уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Совокупность уравнений Лапласа и движения, при соблюдении определенных граничных условий, позволяет описать плоскую стоячую волну следующим образом:

$$T_1 = 2\sqrt{\frac{\pi L}{gh \frac{\pi h}{L}}}, \quad (2,20)$$

$$\eta = \frac{Cg}{g} Chkh \sin k(x - \varepsilon_1) \sin(\sigma t + \varepsilon), \quad (2,21)$$

где T_1 — период одноузловой сейши; L — длина озера; h — глубина; m — угловая частота колебаний; η — вертикальное сме-

шение частицы воды в плоскости колебаний; $k = \frac{\pi}{L}$; C , ε и ε_1 — некоторые постоянные, значения которых будут определены далее; g — ускорение силы тяжести.

Таким образом, период одноузловой сейши при плоском решении задачи определяется в зависимости от длины и глубины водоема, причем эта зависимость более сложная по сравнению с формулой Мериана. Применять формулу (2,20) для расчета периода одноузловой сейши в естественных озерах можно, по-видимому, только в том случае, если ширина и глубины озера не меняются слишком резко.

Определим значения величин C , ε и ε_1 . Уравнение (2,21) характеризует профиль плоской стоячей волны в любой момент времени и изменение его в любом пункте в зависимости от времени.

Известно, что в конце озера, в нашем случае в начале координат, у сейши наблюдается пучность. Обозначим максимальный подъем уровня в начале координат через H и будем рассматривать момент времени, когда наблюдается этот уровень, как начальный момент. В таком случае, при $x=0$ и $t=0$ подъем уровня $\eta_n = H$. Примем

$$C = \frac{Hg}{\sigma Chkh}.$$

Подставив вместо C в уравнение (2,21) это выражение, получим

$$\eta = H \sin k(x - \varepsilon_1) \sin(mt + \varepsilon).$$

При $x=0$, $t=0$ и $\eta_n = H$, откуда $H = H \sin(-k\varepsilon_1) \sin \varepsilon$, или после сокращения обеих частей равенства на H будем иметь

$$1 = \sin(-k\varepsilon_1) \sin \varepsilon.$$

Очевидно, что это равенство может иметь место только в том случае, если $\sin(-k\varepsilon_1) = 1$ и одновременно $\sin \varepsilon = 1$. Из этих равенств следует:

$$1) -k\varepsilon_1 = \frac{\pi}{2}, \text{ или } \frac{\pi}{L} \varepsilon_1 = -\frac{\pi}{2}, \text{ откуда } \varepsilon_1 = -\frac{L}{2};$$

$$2) \varepsilon = \frac{\pi}{2}.$$

Подставив найденные выражения в формулу (2,21), получим

$$\eta = H \sin \pi \left(\frac{x}{L} + \frac{1}{2} \right) \cos mt.$$

Это уравнение характеризует профиль плоской стоячей волны при постоянной глубине в любой момент времени и колебания уровня во времени в любой точке оси озера.

Как уже отмечалось выше, Б. Б. Девисон еще в 1936 и 1937 гг. [10, 11], критикуя существовавшие в то время теории сейш, сделал попытку решить задачу о сейшах в общем

виде, а именно как двухмерную задачу. Однако найденное Девисоном решение оказалось чрезвычайно сложным и не было доведено им до возможности практического использования.

Более простое решение можно найти у Стокера [50]. Здесь под потенциалом скорости понимается функция, имеющая вид $\varphi(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z) f(t)$ ⁵. Основываясь на уравнениях движения и неразрывности и учитывая граничные условия, нетрудно в результате получить уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[h \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] + \left[h \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] + \frac{\sigma^2}{g} \Phi = 0, \quad (2,22)$$

где σ — частота колебаний.

Решение этого уравнения для естественных озер возможно лишь методом конечных разностей. Для иллюстрации применения этого метода Стокер в своей книге приводит решение для озера квадратной формы постоянной глубины. В таком случае приведенное выше уравнение может быть переписано в виде

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + m^2 \Phi = 0, \quad m^2 = \frac{\sigma^2}{gh}. \quad (2,23)$$

Квадрат (план водоема) разбивается на некоторое число малых квадратов, сторона каждого из которых равна $x=y$. Функции φ Стокер полагает возможным придать вид

$$\varphi = A \cos \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{j\pi y}{l}, \quad (2,24)$$

где A — некоторая произвольная постоянная величина; l — длина стороны квадрата. При подстановке в формулу (2,23) выражения (2,24) нетрудно исключить величину A , разделив обе части уравнения на A . В выражении (2,24) k и j — любые целые и положительные числа, удовлетворяющие условию

$$m^2 = \pi^2 \frac{k^2 + j^2}{l^2}. \quad (2,25)$$

Решение уравнения (2,23) производится методом конечных разностей и сводится к следующим операциям. Прежде всего примем $k=j=1$ в формуле (2,24). В таком случае функция Φ примет вид

$$\Phi = A \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi y}{l}.$$

Для некоторого числа точек, например 10, расположенных симметрично в углах малых квадратов, находим в виде конечных разностей значения $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ и значения Φ . Подставим

⁵ В книге Стокера приводится символика несколько иная. Здесь же обозначения функции приняты такие же, что и на странице 23 настоящей монографии.

найденные величины в уравнение (2,23) для всех 10 точек. Получим 10 уравнений с одним неизвестным, не содержащих свободных членов.

Для того чтобы корень этого уравнения не был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы определитель этих уравнений был равен 0. Развернув этот определитель, получим уравнение десятой степени с одним неизвестным m . Методом последовательных приближений найдем корень этого уравнения. Затем проверим, удовлетворяет ли найденное значение m условию (2,25). В противном случае задаемся новой комбинацией значений k и j и вновь проделываем все описанные операции, пока не добьемся того, что найденное значение m удовлетворяет условию (2,25).

Очевидно, что решение поставленной задачи для естественного водоема принципиально ничем не отличается от решения для описанного случая — водоема квадратной формы постоянной глубины.

Различие будет заключаться в том, что решаться методом конечных разностей будет уравнение (2,22), а не (2,23), и в формуле (2,24) второй множитель (косинус) будет содержать не длину водоема, а его ширину.

ПОПЕРЕЧНЫЕ СЕЙШИ

До сих пор речь шла о сейшах (продольных), развивающихся вдоль продольной оси озера. Но помимо них на озерах наблюдаются еще и поперечные сейши. Их возникновение и развитие по существу не отличаются от возникновения и развития продольных сейш. Следует, однако, заметить, что при значительной протяженности озера и сложности очертаний его береговой линии явление поперечных сейш усложняется, в особенности если длина водоема незначительно отличается от ширины. Праудмэн [42] пришел к выводу, что для широкого прямоугольного озера длиной L и шириной b сочетание N -узловых продольных и M -узловых поперечных сейш дает сложную сейшу, период которой T определяется формулой

$$T = \frac{2}{\sqrt{gh}} \left[\frac{N^2}{L^2} + \frac{M^2}{b^2} \right]^{-1/2}.$$

Если поперечная сейша имеет такой же период, как и продольная, то может наблюдаться разнообразие возможных колебаний. Это разнообразие зависит от различия в моментах наступления максимумов и минимумов этих сейш. В случаях такого рода, по сообщению Хатчинсона, максимальные и минимальные уровни перемещаются вокруг озера по направлению, определяемому геострофической силой. Для оз. Мендота, в котором периоды сейш направлены вдоль осей север-юг

и запад-восток, Брисон и Куп [57] обнаружили вращение сейш по часовой стрелке.

П. А. Киткин [23] на основании теоретических исследований ветровых колебаний уровня мелководного замкнутого бассейна пришел к заключению, что под действием отклоняющей силы вращения Земли плоскость свободных колебаний вращается по часовой стрелке. Анализ данных наблюдений над сейшами Аральского моря, выполненный П. А. Киткиным, подтвердил справедливость этого вывода.

Можно высказать предположение, что в ряде случаев значительные расхождения между вычисленными теоретически и наблюдаемыми периодами сейш объясняются несовпадением осей колебаний с осью озера. На это обстоятельство, между прочим, указывает и П. А. Киткин: „Если принять во внимание и Малое море, которое находится в северо-восточном углу, севернее линии о-в. Кокарал — р. Сыр-Дарья, то оказывается, что длина моря изменяется в пределах от 318 до 550 км, что и соответствует изменению периода колебаний от 12 до 21 часа“ [23, стр 39].

ПРИЧИНЫ ВОЗНИКНОВЕНИЯ СЕЙШ

Еще в конце прошлого столетия Форель в своей известной монографии [66], посвященной Женевскому озеру, довольно подробно останавливался на причинах возникновения сейш. По мнению Фореля, основной причиной этого явления следует считать атмосферное давление, а затем уже ветер. Кристал в своих исследованиях, более поздних, чем работы Фореля, также останавливается на этом вопросе и солидаризируется с Форелем, выдвигая на первый план давление воздуха как основную причину возникновения сейш. Кроме упомянутых двух факторов, Форель, Кристал и более поздние исследователи указывают еще на следующие причины возникновения сейш: внезапное и быстрое накопление воды в одной части озера, вызванное выпадением здесь очень интенсивного ливня; сгоны и нагоны, в результате которых также происходит накопление воды в одной части озера; прохождение атмосферных возмущений над озером; сейсмические явления и разряды атмосферного электричества.

В результате работ Дудсена, Праудмэна и других в настоящее время можно считать установленным, что основными причинами возникновения и развития сейш являются изменения атмосферного давления и ветер.

Форель, анализируя возникновение сейш в результате резкого падения атмосферного давления или наличия сколь угодно значительной разницы в давлении в противоположных концах озера, рассматривал лишь статическое изменение уровня. Превышение его над уровнем воды в другом конце

озера определяется соотношением между разностью давления в *мб* и толщиной слоя воды, способного уравновесить эту разницу. Естественно, что эта причина не может вызвать сейшу сколько-нибудь значительной высоты.

Совершенно другой эффект будет наблюдаться при изменении барического рельефа над озером (прохождение атмосферных возмущений над водоемом). В результате этого возникнет система ветров, течений, и при достаточно больших размерах озера будет отчетливо проявляться сила Кориолиса. Уровень воды в этом случае принято называть динамическим. Н. Н. Зубов [19] пришел к выводу, что в грубом приближении изменение уровня Δh в направлении понижения давления в рассматриваемом случае может быть определено по простой формуле $\Delta h = -10 \Delta p$, где Δp — понижение давления в *мб*. Это значит, что если, например, изменение давления на данном расстоянии равно Δp , то статический уровень на этом расстоянии изменится на Δp см, а динамический, под влиянием тех же факторов, на величину, в 10 раз большую. Только этим и можно объяснить мощную сейшу, наблюдавшуюся на оз. Мичиган в июне 1954 г., с амплитудой, превышающей 2 м.

Роль ветра в образовании сейш сводится к возникновению сгонов и нагонов и связанных с ними различий в уровнях воды в противоположных концах озера. При продолжающемся ветре возникают сейшеобразные колебания, а при прекращении ветра — сейши в чистом виде.

Влияние прочих факторов на формирование сейш, как правило, невелико.

СЕЙШЕОБРАЗНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Кроме свободных колебаний — сейш, в озерах наблюдаются автоколебания, называемые либо сейшеобразными, либо сгонно-нагонными колебаниями.

И те и другие являются периодическими колебаниями и возникают под действием внешней силы. Но в то время, как свободные колебания — сейши после прекращения силы, вызвавшей их, имеют тенденцию к затуханию, сейшеобразные колебания испытывают и в дальнейшем действие этой силы и не обладают указанной тенденцией. Можно полагать, что сейшеобразные колебания могут превратиться в сейши, если прекратится действие сил, возбуждающих эти колебания.

Сейшеобразные, или сгонно-нагонные, колебания возникают только при сгонах и нагонах, вызванных ветром той или иной интенсивности и той или иной продолжительности. В соответствии с этим имеются существенные различия в структуре сейш и сейшеобразных колебаний.

Представим себе, что в каком-либо водоеме существует периодическое движение воды с периодом T_1 . Достаточно

получить представление об особенностях такого рода движения, чтобы сделать соответствующие обобщения. Допустим, что в некоторый момент времени ($t=0$), когда вода еще находилась в состоянии покоя, в одном конце озера — слева (рис. 5) — уровень воды оказался выше, чем в противоположном. В результате этого возникнут градиенты давления и начнется градиентное течение, направленное слева направо.

Предположим далее, что в момент времени через $\frac{T_1}{4}$ сек после начала движения водная поверхность приняла горизонтальное положение, а течение, направленное слева направо, достигло максимальных скоростей. В момент времени через $\frac{1}{2} T_1$ сек после начала движения на правом конце озера будет наблюдаться наивысший уровень, а с левой — наинизший. Вновь возникнет градиент давления и начнется течение справа налево. В момент времени через $\frac{3}{4} T_1$ сек после начала движения течение вновь достигнет наивысшей скорости, и водная поверхность вновь станет горизонтальной. Через T_1 водная поверхность озера примет исходное положение.

Рассмотрим для простоты прямоугольный бассейн постоянной глубины и постоянной ширины (h и b). Будем искать выражения для η (вертикальное смещение) и u (скорость движения) как функции от x и t , удовлетворяющие условиям:

1) обе функции характеризуют гармонические колебания;

2) скорость $u=0$ при $x=0$ и $x=l$;

3) вертикальное смещение $\eta=H$ (максимальный подъем уровня) при $x=0$ и при $t=0$ и $\eta=-H$ при $x=l$ и $t=0$.

Этим условиям удовлетворяют следующие функции:

$$\eta = H \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{2\pi t}{T_1}, \quad (2,26)$$

$$u = C \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{2\pi t}{T_1}. \quad (2,27)$$

Уравнение неразрывности, как это было показано ранее, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} (Au) + b \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0.$$

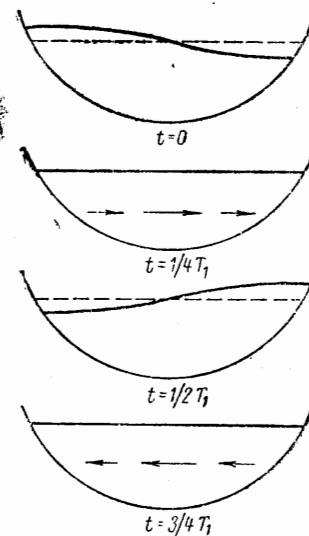


Рис. 5. Схема возникновения колебаний.

Но так как для прямоугольного бассейна $A=bh$, где b — ширина бассейна, то его можно записать в виде

$$h \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial \eta}{\partial t}. \quad (2,28)$$

Уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - g \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (2,29)$$

Продифференцируем уравнение (2,27) по x , получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = C \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l} \sin \frac{2\pi t}{T_1}. \quad (2,30)$$

Подставим найденное выражение в формулу (2,28)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{\pi}{l} h C \cos \frac{\pi x}{l} \sin \frac{2\pi t}{T_1}. \quad (2,31)$$

Принтегрировав обе части уравнения, получим

$$\eta = - \frac{\pi}{l} h C \int_0^{T_1} \cos \frac{\pi x}{l} \sin \frac{2\pi t}{T_1} dt,$$

откуда

$$\eta = \frac{T_1 h}{2l} C \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{2\pi t}{T_1}. \quad (2,32)$$

Сравнивая полученное выражение (2,32) с принятым ранее (2,26), можно записать

$$\frac{T_1 h}{2l} C = H,$$

откуда

$$C = H \frac{2l}{T_1 h}. \quad (2,33)$$

Вспомним формулу Мериана $T_1 = \frac{2l}{\sqrt{gh}}$. Подставим вместо T_1 это выражение в формулу (2,33)

$$C = H \left(\frac{g}{h} \right)^{1/2}. \quad (2,34)$$

Формула эта была получена для прямоугольного бассейна постоянной глубины и постоянной ширины. Но в природе такие водоемы почти не встречаются. По этой причине величина скорости, вычисленная по приведенной формуле, представляет собой грубое приближение и дает только представление о порядке величины скорости. Эти величины в большинстве слу-

чаев невелики. Так, например, по данным, приведенным в книге Дж. Праудмэна „Динамическая океанография“, скорость S сейши на оз. Лох-Эрн при средней глубине водоема $h=60$ м и $H=10$ см составила всего лишь 4 см/сек. Для оз. Байкал при средней глубине $h=688$ м и максимальном подъеме уровня $H=17$ см скорость течения, вычисленная в настоящей работе по приведенной формуле, оказалась равной всего лишь 2,5 см/сек. Однако иногда, по сравнительно редко, встречаются значительно большие скорости (см., например, стр. 39).

При сейшах всегда наблюдаются течения. Если скорости этих течений и относительно малы, то массы воды, проходящие через поперечные сечения озера, весьма велики, причем в движении участвует вся водная масса озера.

Совершенно иной характер носят течения при сейшеобразных, или сгонно-нагонных, колебаниях. Под воздействием ветра возникновение нагона или сгона сопровождается образованием дрейфового течения. Это течение приводит к подъему уровня в некоторой области, прилегающей к берегу; в то же время у противоположного берега наблюдается понижение уровня. Возникает поверхностный уклон. Под его воздействием на массу воды по всей ее толще замедляется развитие поверхностных течений и возникают градиентные течения, направленные в обратную сторону по отношению к дрейфовым. Градиентные течения захватывают значительно большие массы воды, чем поверхностные, и при определенных условиях распространяются до дна.

Массы воды, охваченные градиентными течениями, обуславливают большую инертность, чем поверхностные. При изменяющихся скоростях ветра и уклоне градиентные течения заметно отстают от поверхностных и не успевают приобрести скоростей, соответствующих действующему уклону. Это обстоятельство является причиной значительных подъемов уровня в области нагона, что обычно приводит к колебаниям свободной водной поверхности. При более или менее равномерном ветре эти колебания напоминают по своему характеру сейши, почему они и называются иногда сейшеобразными. А. В. Караушев эти колебания называет сгонно-нагонными.

Сейшеобразные колебания отличаются от сейш в чистом виде своеобразием возбуждения и кинематической структурой, а также наличием постоянно действующей силы, с усилением которой амплитуда колебаний увеличивается, с ослаблением — уменьшается.

Можно предполагать, что периоды сейшеобразных колебаний, так же как и периоды сейш в чистом виде, определяются морфологией и морфометрией водоема и с достаточной степенью точности могут рассчитываться при помощи тех же методов, что и периоды обыкновенных сейш.

ВНУТРЕННИЕ СЕЙШИ

Как известно, при сейшах происходит колебание всей водной массы в целом. Если же эта масса состоит из нескольких слоев различной плотности, то возникают так называемые внутренние сейши, при которых происходит колебание отдельных слоев относительно друг друга.

Существование внутренних сейш впервые было обнаружено в 1903 г. Ватсоном [84] в оз. Лох-Несс (Шотландия). Детальное изучение этого явления было произведено позднее Веддерберном [85] и другими исследователями на примере главным образом европейских озер. Большое внимание уделено внутренним сейшам в работах Мортимера [76]. Мортимер суммировал и проанализировал данные наблюдений разных лет по европейским озерам, подробно исследовал это явление на оз. Уиндермер, воспроизвел внутренние сейши на модели и изложил теорию внутренних сейш. Еще до этого времени советский ученый В. М. Маккавеев разработал и опубликовал теорию внутренних волн в докладах Международной конференции балтийских стран [74] и в Ученых записках географического факультета ЛГУ [31].

С теорией внутренних волн можно ознакомиться в монографиях Н. Е. Кочина, И. Л. Кибеля и Н. В. Розе [25], Дж. Праудмана [42], в упомянутых статьях В. М. Маккавеева, в работах Веддерберна [85] и Хатчинсона [71]. По мнению двух последних ученых, явление внутренних сейш характерно для стратифицированных озер и может быть вызвано действием сильного ветра. Во время нагона на подветренной стороне образуется временное „нагромождение воды“, которое сначала вызовет поверхностные сейши, а затем внутренние. Ветер, дующий вдоль поверхности озера, сгоняет воду к подветренному берегу, на ее место к поверхности наветренной стороны бассейна выступает холодная глубинная вода. В результате сгонно-нагонных явлений изотермы в поверхностном слое наклонены вниз к подветренной стороне озера. Положение изотерм, расположенных ниже и даже на больших глубинах, также меняется. Обычно изотермы на больших глубинах наклонены в направлении, противоположном тому, какое они имеют в поверхностном слое. С прекращением ветра в период сравнительного затишья положение изотерм не становится горизонтальным; они испытывают периодические смещения в соответствии с колебательными движениями глубинных слоев. Иллюстрацией данного явления может служить рис. 6, заимствованный у Мортимера. На этом рисунке отражены внутренние сейши в глубинных слоях оз. Уиндермер.

Таким образом, колебания, связанные с внутренними сейшами на водной поверхности водоема, не бывают заметны. Они обнаруживаются по периодическим колебаниям темпера-

туры воды на одних и тех же глубинах, почему эти сейши иногда и называются температурными.

По данным зарубежных исследователей, наиболее отчетливо и часто одноузловая внутренняя сейша проявляется в слое температурного скачка (на границе термоклина). Внутренние сейши на границе термоклина существуют долгое время.

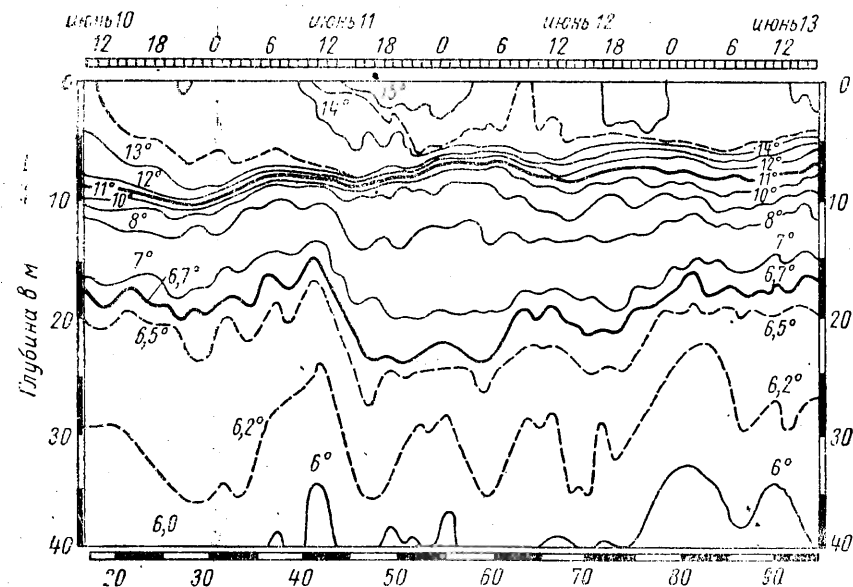


Рис. 6. Изменение температуры по вертикали в оз. Уиндермер с 11 час 10 VI до 15 час 13 VI 1947 г. (по Мортимеру).

Период внутренней одноузловой сейши для случая двухслойной массы может быть вычислен при помощи формулы, известной под названием формулы Ватсона:

$$T_{1B} = \frac{2L \sqrt{\frac{1}{h} + \frac{1}{h_1}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\rho}{\rho_1}\right) g}}.$$

В этой формуле L — длина озера; h и h_1 — толщина каждого из слоев; ρ и ρ_1 — плотность воды в этих слоях.

Сравним период такой сейши с периодом обычной поверхностной сейши для прямоугольного бассейна постоянной глубины, для которого период одноузловой продольной сейши можно вычислить по формуле Мериана (T_1). Вычислим отношение

$$T_{1B} : T_1 = \frac{2L \sqrt{\frac{1}{h} + \frac{1}{h_1}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\rho}{\rho_1}\right) g}} : \frac{2L}{\sqrt{g(h+h_1)}} = \frac{h+h_1}{\sqrt{hh_1\left(1 - \frac{\rho}{\rho_1}\right)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{h}{h_1}} + \sqrt{\frac{h_1}{h}}}{\sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_1}}}.$$

Эта дробь всегда больше 1. В самом деле, при любых соотношениях h и h_1 числитель дроби больше 1. Величина же $1 - \frac{\rho}{\rho_1}$ значительно меньше 1, так как ρ мало отличается от ρ_1 . Таким образом, в прямоугольном бассейне период одноузловой внутренней сейши значительно превосходит период обычной одноузловой сейши. Этот вывод можно распространить и на бассейны любой формы. Данные непосредственных наблюдений подтверждают справедливость сказанного. Так, на оз. Лох-Эрн в Шотландии период внутренней одноузловой сейши по данным наблюдений более, чем в 100 раз, превосходит период обычной сейши.

Значительно больше и амплитуда колебаний внутренних сейш; в некоторых озерах она достигает 60 м и более. Для иллюстрации величин периодов и амплитуд внутренних сейш в различных озерах приводится табл. 4, заимствованная у Хатчинсона.

Хорошо изучены внутренние сейши оз. Уиндермер. По мнению Мортимера, внутренние сейши в этом озере появляются довольно часто и вызываются сравнительно умеренными ветрами. Так (см. рис. 7, заимствованный из работы Мортимера, 1952), внутренние сейши с 15-часовым периодом зарегистрированы на уровне термоклина на глубине 9,5 м в северной части озера 25 июня—4 июля 1947 г. при различных направлении и скорости ветра. В этом же озере была обнаружена одноузловая внутренняя сейша и ниже слоя скачка. Амплитуда и период колебаний этой сейши были больше, чем на уровне слоя скачка.

На оз. Лох-Несс Ватсоном [84] обнаружены периодические колебания температуры на различных глубинах. Период этих колебаний около трех суток. Любопытно, что на глубине 61 м и глубже проявлялась одна и та же периодичность (продолжительность периода и фазы вполне совпадали, лишь постепенно уменьшалась амплитуда колебаний). На меньших глубинах четкая периодичность в колебаниях исчезла, по-видимому, под воздействием ветра и возникновения неперiodических колебаний.

Таблица 4

Озеро	Год наблюд.	Автор	Период, ч		Примечание
			наблюд.	вычисл.	
Люцер Уиндерзее	1927	Экснер (1928)	3,7	3,9	Возможно появление трехузловой сейши
Уиндермер (северный бассейн)	1947	Мортимер (1953)	15	14,8	
То же	1951	"	12—14	13,8	
Уиндермер (южный бассейн)	1950	"	23—24	19,2	
То же	1951	"	23—25	22,2	
Лох-Эрн	1911	Велдерберн (1912)	15—16	16,4	Амплитуда до 8 м
Старый Вольфганг	1907	Экснер (1908)	25	20,6	2-узловая сейша, наблюдаются другие колебания
Мадюзее	1910	Хальбфас (1910)	25	25,8	Амплитуда до 10 м
Вюрмзее (Штарнбергерзее)	1894	Велдерберн, (1911) Уле (1901)	30	29,2	Амплитуда 10—15 м
Лох-Несс	1903	Мортимер (1953)	57,6—60	60	Амплитуда свыше 4 м
Женевское	1941—1944	Велдерберн (1907), Мортимер (1953)	72—108	96	Амплитуда до 60 м
Байкал	1914	Мортимер (1953), Дюссарт (1954) Шостакович (1926), Мортимер (1953)	38 суток	75,5 суток	Амплитуда до 150 м, преобладает 2-узловая сейша

У нас в СССР о внутренних сейшах озер до последнего времени почти не упоминалось. Исключение составляют оз. Байкал и Аральское море. Первые сведения о внутренних сейшах оз. Байкал приводятся в работе В. Б. Шостаковича [54], а затем Б. Л. Дзердзеевского [12]. Нужно отметить, что Л. Л. Россолимо [45], не отрицая существования внутренних сейш в оз. Байкал, высказывает сомнение относительно обоснованности выводов этих авторов. В статье В. И. Верболова [6], посвященной влиянию динамических факторов на распределение

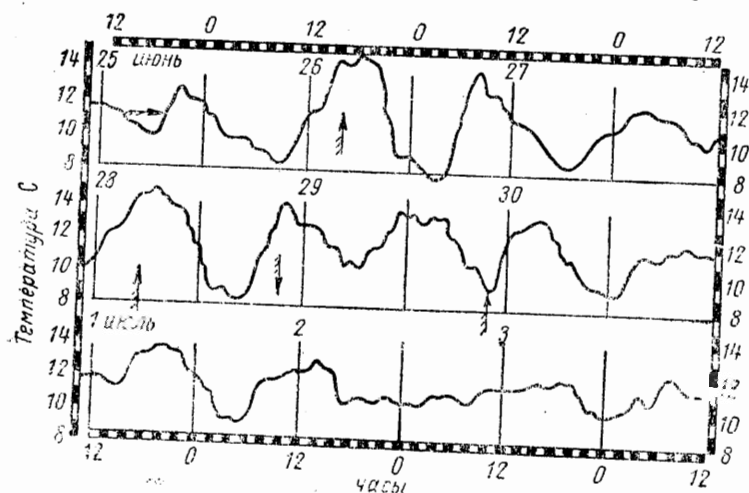


Рис. 7. Внутренние сейши с 15-часовым периодом на глубине 9,5 м в оз. Уиндермер 25 VI — 4 VII 1947 г. Приблизительное направление и скорость ветра указаны стрелками (по Мортимеру).

температуры воды в оз. Байкал, приводятся, в частности, интересные данные о внутренних сейшах. На основании собранных Байкальской лимнологической станцией в 1954—1957 гг. материалов послойных измерений температуры обнаружены поперечные внутренние сейши с периодом 5—6 и 15 час и высотой в 5—6 и 5—20 м.

Л. С. Берг еще в 1900 г. при исследовании Аральского моря обратил внимание на необычные колебания температуры в глубинных слоях озера, не объяснимые нагреванием или охлаждением путем лучеиспускания. Позднее, в 1910 г., Л. С. Берг [4] в специальной статье, посвященной внутренним волнам, обращает внимание на внутренние сейши как явление важное не только с физической, но и с биологической точки зрения. Строго говоря, формулу Ватсона можно применять только для бассейнов прямоугольной формы. Большинство же естественных водоемов значительно отличается от прямоугольных бассейнов и, следовательно, в отдельных случаях применение

формулы Ватсона может привести к грубым ошибкам. Для таких водоемов, следуя Веддерберну, можно поставленную задачу решать, пользуясь методом Кристала, но построив предварительно нормальную кривую для внутренней сейши.

Такая нормальная кривая строится следующим образом. По оси абсцисс откладываются площади водной поверхности, так же как и для нормальной кривой обычной сейши, а по оси ординат — величины σ , вычисленные по формуле

$$\sigma = b_e(x) \left[\frac{\rho_e}{A_e(x)} + \frac{\rho_h}{A_h(x)} \right]^{-1}.$$

В этой формуле $b_e(x)$ — ширина сечения озера на глубине, соответствующей поверхности раздела; $A(x)$ — площадь поперечного сечения нижнего слоя; $A_e(x)$ — площадь поперечного сечения верхнего слоя, ρ_e и ρ_h — соответственно плотности воды верхнего и нижнего слоев.

Построив нормальную кривую внутренней сейши, надлежит решить основное уравнение Кристала так же, как это делалось для случая с обыкновенной сейшей.

Веддерберн предложил решение задачи о расчете периода внутренней сейши в случае, если в озере имеется более, чем два слоя. Представим себе, что внутренняя сейша возникла на поверхности раздела, выше которой находится N_1 слоев с плотностями ρ_i ($i=1, 2, 3, \dots, N_1$) и ниже которой располагается N_2 слоев с плотностями ρ_j ($j=1, 2, 3, \dots, N_2$). Обозначим ширину слоев на данном сечении на расстоянии x (по поверхности) от начала координат через b'_i для верхних слоев и через b_i для нижних и соответственно через $A_{e(x)}$ и $A_{h(x)}$ площади сечений выше и ниже поверхности раздела.

Ординаты нормальной кривой Веддерберн предлагает вычислять по формуле

$$\sigma_x = \sum_{j=1}^{N_2} \rho_j b'_j(x) A_{h(x)} + \sum_{i=1}^{N_1} \rho_i b_i(x) \left[\frac{1}{A_{e(x)}} + \frac{1}{A_{h(x)}} \right]^{-1}.$$

Дальнейшие вычисления производятся так же, как и в предыдущем случае.

Решение задачи о расчете периода внутренних сейш как для случая двух слоев, так и любого числа их было предложено также советским ученым В. М. Маккавеевым [31, 74].

ГИДРОЛОГИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ СЕЙШ

Мировая литература о сейшах насчитывает не одну сотню наименований. При описании сейш обращается внимание главным образом на периоды колебаний, число узловых линий, их положение, реже упоминается об амплитуде колебаний уровня,

в сейшевых течениях и как исключение обращается внимание на те гидрологические явления, которые сопутствуют сейшам в водоеме.

В нашей учебной литературе еще совсем недавно сейшам уделялось внимание только с точки зрения возможного перекоса водной поверхности и правильного определения уровня воды по всему контуру озера по данным водомерных постов, с целью более правильного вычисления водного баланса озера (М. А. Великанов, 1948; А. И. Чеботарев, 1960).

Сейши, как известно, сопровождаются течениями. Однако в литературе натурные данные о сейшевых течениях почти отсутствуют. Отдельные ссылки на периодически меняющиеся по направлению сейшевые течения основаны, как правило, на визуальных наблюдениях. В связи с этим небольшая статья А. И. Тихомирова [52], в которой приводятся результаты измерений скоростей и направлений течений в шхерном районе Якимварского залива Ладожского озера, представляет исключительный интерес. В небольшом проливе этого залива в разные дни наблюдалась смена течений с периодами в 60, 30 и 20 мин. Скорости течения в первом случае в среднем составили 0,55 м/сек, при максимальном значении — 0,78 м/сек.

Интересные сведения о сейшевых течениях в оз. Б. Медвежье (Канада) приводит А. Е. Порсильд [80], ссылаясь на А. В. Болланда, который прожил много лет в районе этого озера и засвидетельствовал во многих его местах ритмические колебания уровня, вызывающие образование значительных течений. Так, вблизи берега в узких проливах залива Диз (северная часть озера) Болланд отметил постоянное движение воды то в одну, то в другую сторону. Под влиянием этого движения в мягкие зимы некоторые части этих проливов остаются совершенно или частично свободными ото льда. Сейшевые колебания и течения под ледяным покровом в проливах залива Диз наблюдались при установке рыболовной сети. В суровую зиму проливы были покрыты льдом, но толщина его была много меньше, чем в открытой части озера. Сейшевые колебания вызывали во льду трещины, сопровождающиеся громкими звуками. В первой неделе мая в северном проливе образовалась полынья размером около 100 м. Оба пролива освободились ото льда раньше, чем озеро.

Во время пребывания Порсильда у озера в течение июля сейши в разных местах наблюдались по всему северному берегу оз. Б. Медвежьего. Самое сильное течение, вызванное сейшами, было обнаружено в юго-восточном углу озера в заливе Конджурор. Южный вход в этот залив имеет ширину около 360—450 м и глубину в несколько морских сажен (1 морская сажень равна 182 см). В самом узком месте пролива движение воды в сторону озера было похоже на стремнину реки со скоростью течения 4—6 миль/час, или 1,8—2,7 м/сек. На-

блюдавшееся обратное течение имело меньшие скорости. Здесь ледяной покров не образуется даже в самые суровые зимы. Достаточно сильное сейшевое течение наблюдалось в оз. Балатон (Венгрия) в одном из его узких проливов [71].

Эти и подобные им наблюдения в проливах и заливах озерных водоемов свидетельствуют об интенсивных смещениях водных масс в прибрежных зонах при сейшах и сейшеобразных колебаниях, что неизбежно должно привести к значительному перемешиванию, а следовательно, и к выравниванию по вертикали температуры воды, содержания в ней растворенного кислорода, взвешенных и растворенных веществ. А. Дефант [60] горизонтальными смещениями водной массы объясняет тот факт, что водная масса оз. Гарда, в южной его части, в течение коротких промежутков времени то взмучивается, то вновь светлеет.

Гидродинамическая теория Кристала, методы расчетов периодов сейш, в особенности метод Дефанта, основываются на существовании явления перемещения водных масс в озере во время сейш и сейшеобразных колебаний. Горизонтальные смещения водной массы и скорости течений при сейшах в открытой части озера, по-видимому, невелики. Их трудно зарегистрировать обычными современными приборами.

Как указывалось в главе II (стр. 31), скорость движения воды при сейшах можно вычислить, пользуясь формулой

$$C = H \left(\frac{g}{h} \right)^{1/2}.$$

В табл. 5 приводятся величины скоростей сейшевых течений, вычисленные для некоторых озер по приведенной формуле.

Таблица 5

Скорости сейшевых течений

Озеро	Длина, км	Средняя глубина h , м	Амплитуда H , см	Скорость C , см/сек
Лох-Эри (Шотландия)	50	50	10	4,0
Балхаш	595	6	5	6,1
Ладожское	197	51	2	0,9
Залив Сартанлахти Ладожского озера	9	10	2	1,9
Аральское море	428	16	20	15,4
Байкал	636	683	17	2,5

Несмотря на незначительные скорости в открытой части озера, массы воды, перемещающиеся от одного поперечного сечения к другому во время сейш, выражаются большими ве-

личинами, а горизонтальные смещения оцениваются десятками или сотнями метров, в зависимости от размеров озера и периода сейш. Очевидно, что перемещение больших масс воды то в одном, то в другом направлении нарушает стационарность этих масс, и тем самым создаются условия для перемешивания вод и относительного выравнивания в озере температуры воды, растворенных и взвешенных веществ по вертикали. Если для открытой части озера это предположение нуждается в подтверждении, то в прибрежных районах озера — заливах, проливах и бухтах — факт перемешивания водной массы в процессе сейшевых колебаний можно считать достоверным. Скорости сейшевых течений в проливах и заливах, аналогично приливо-отливным течениям в морях, зависят от объема воды, проходящего через то или иное сечение, и от размера площади данного сечения. При определенном сочетании этих двух величин скорости могут быть значительными, о чем и свидетельствуют приведенные ранее примеры сейшевых течений в проливах некоторых озер.

В литературе иногда упоминается не только о сейшевых течениях в прибрежной зоне озера, но и об их влиянии на глубину и форму отдельных участков этой зоны. Так, Л. С. Бергом в монографии „Аральское море“ [3] отмечается наличие сейшевых течений в узких проливах озера. Сильное сейшевое течение наблюдалось им в протоке, соединяющем небольшое озеровидное расширение с заливом Б. Сары-Чаганак. Течение в этом проливе было сильнее, чем в р. Сыр-Дарье у г. Казалинска, где оно свыше 1,3 м/сек. Не будь этих течений, заключает Л. С. Берг, расширение давно отделилось бы косой от моря и превратилось в озеро.

На аналогичное явление обращает внимание Хатчинсон [71], ссылаясь на Крекера [73]. На западном конце озера Эри отмечены течения, вызванные шестидесятиминутными сейшами. Эти течения предохраняют пролив, связывающий озеро с лагунами, от заиления. Лагуны являются хорошими питомниками для мальков рыб, в связи с чем сейшевые течения и были подмечены наблюдателями.

В озерах, помимо обычных сейш, наблюдаются еще и внутренние сейши. Если в первом случае в колебательном движении участвует вся водная масса, то во втором случае, как уже указывалось ранее, наблюдаются колебания отдельных различающихся между собой по плотности слоев воды по отношению друг к другу.

Внутренние сейши, очевидно, оказывают большое влияние на гидрологический и биологический режимы озер. Проявляется оно в периодических колебаниях температуры на одних и тех же глубинах, а также в изменениях содержания растворенного кислорода, содержания в единице объема водной массы планктонных организмов, взвешенных веществ и т. п. К сожа-

нию, гидрологи долгое время не обращали внимания на эту сторону явления сейш. Ссылки на воздействие сейш на гидрологический режим озер можно встретить в зарубежных исследованиях. У нас в СССР о внутренних сейшах на озерах до последнего времени почти не упоминалось. Исключение составляют оз. Байкал и Аральское море. Краткие сведения о внутренних сейшах, как уже отмечалось ранее, можно найти в работах Л. С. Берга [4], В. Б. Шостаковича [54], Б. Л. Дзержевского [12] и позднее В. И. Верболова [6].

Как известно, явление внутренних сейш характеризуется не только вертикальными колебаниями водной массы, но и горизонтальными смещениями водных слоев. Эти смещения в верхних слоях происходят в одном периодически меняющемся направлении, в нижних — в противоположных направлениях. Подобного рода колебания могут объяснить наличие турбулентной диффузии в зоне гипolimниона и в придонных слоях некоторых стратифицированных водных масс озер, несмотря на то, что эти слои изолированы от поверхностных резким изменением градиента плотности. О турбулентной диффузии в придонных слоях высказывают предположение Мортимер [76] и Хатчинсон [71]. Последний, например, ссылаясь на Парментера, сообщает, что в озере Эри внутренние сейши приводят в движение холодные глубоководные слои, смещая их в горизонтальном направлении на 64 км.

Выяснению влияния сейшевых колебаний на гидрологический и биологический режим оз. Виктория посвящена работа Фиша [65]. В этой работе произведен анализ наблюдений за 1950—1955 гг. над температурой, содержанием растворенного кислорода, содержанием фитопланктона в единице массы воды на различных глубинах. Любопытно, что, помимо сезонных колебаний гидрологических элементов, Фишем были обнаружены в открытом озере периодические колебания как температуры, так и содержания кислорода. Период колебаний был около 40 суток. Фиш полагает, что эти колебания вызваны внутренними сейшами.

В оз. Виктория годовые колебания температуры невелики, всего около 2°C. Тем не менее в отдельные периоды года, а именно в теплую половину его (сентябрь—апрель), Фиш в 1953 г. наблюдал отчетливо выраженную стратификацию. В холодный период (особенно заметно в мае—июле) наблюдалась гомотермия во всех частях озера как результат перемешивания его вод. Однако изотермия может наблюдаться и в теплый период, как это было, например, в январе 1953 г. Но эти изотермические условия, по мнению Фиша, отличны по своей природе и не являются результатом смешения вод. Подобное явление зарегистрировано в районе станции наблюдения и представляет собой результат оттока холодной воды от места наблюдений и замещения ее теплой водой. Холодная вода по-

явилась вновь в данном пункте наблюдения в феврале. Иначе говоря, в этом случае колебания температуры воды были вызваны внутренними сейшми. На рис. 8, заимствованном у Фиша, изображены периодические колебания температуры в открытой части оз. Виктория с августа по ноябрь 1953 г. Период колебаний, наблюдаемый и вычисленный, составляет 40 суток.

Внутренними сейшми Фиш объясняет и колебания объемов растворенного в воде кислорода в указанный период. Вода хорошо насыщена кислородом тогда, когда температурные различия между верхними и нижними слоями воды наимень-

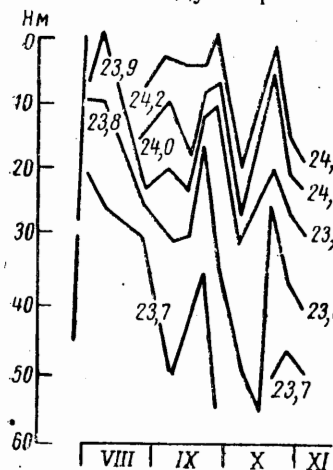


Рис. 8. Периодические колебания температуры воды в оз. Виктория с августа по ноябрь 1953 г. (По Фишу).

шие. В это время водные массы неустойчивы и воды хорошо перемешиваются. В период стратификации поступление кислорода в слой гипolimниона затруднено, в то время как потребление его в придонных слоях агентами, находящимися в воде, происходит интенсивно.

В период внутренних сейш на фоне общего понижения содержания кислорода в глубинных слоях оз. Виктория наблюдалось увеличение концентрации кислорода, повторяющееся с периодом, также близким к 40 суткам. Повышение содержания кислорода в месте наблюдения связано с притоком более теплых и более богатых кислородом поверхностных вод на место отступивших холодных, с меньшим содержанием растворенного O_2 .

Анализируя сейшу с августа по ноябрь 1953 г. на оз. Виктория (отчетливо видную на рис. 8), Фиш высказывает предположение о следующих причинах ее возникновения. Над оз. Виктория 17—21 июля 1953 г. наблюдался необычайно сильный ветер, который сначала вызвал нагон, а затем сейшеобразные колебания уровня, зарегистрированные в Энтеббе. В результате воздействия сильного ветра создались условия для возникновения температурной сейши, которая была зарегистрирована в открытой части озера с конца июля до ноября.

31 июля 1953 г. у Энтеббе был замечен замор некоторых видов рыб (*Tilapia haplochromis*). Это обстоятельство позволило Фишу высказать предположение о колебаниях такого рода, которые привели в движение в открытой части озера глубоководные слои холодной воды, обедненной кислородом. Течение холодной воды, направленное к берегу, чему способствовал сильный ветер 29—30 июля, явилось причиной массовой ги-

бели рыб в прибрежных водах у Энтеббе. Это предположение Фиша нуждается в проверке. Возможно, что холодное течение и связанный с ним замор рыб является результатом сгонно-нагонных явлений в чистом виде, а не следствием их, тем не менее факт, сообщенный Фишем, очень интересен и заслуживает внимания. Он интересен еще и потому, что о периодическом снижении улова рыб в проливе Бувума (северное побережье озера) имелись сведения и ранее. Это снижение связывается с обеднением кислорода в результате термической стратификации.

В 1952 г. сейшевые движения на оз. Виктория, обнаруженные в августе и в последующих месяцах, также являлись результатом действия сильных ветров, наблюдавшихся в июне—начале июля, преобладающего южного направления. Наблюдения в северных проливах и заливах озера послужили Фишу основанием для гипотезы, согласно которой движение воды, вызванное внутренними сейшми в открытом озере, сопровождается периодическими подъемами холодной воды в мелководные прибрежные районы и, таким образом, оказывает влияние на термическую стратификацию прибрежных вод. В прибрежной зоне, вследствие мелководья и более интенсивного перемешивания, расхождения между температурами поверхностных и придонных слоев невелики в течение большей части года. Термическая стратификация устанавливается временно в сравнительно короткие периоды в связи с наплывом холодной воды из озера в придонные слои этой зоны. Одновременно происходят и изменения содержания кислорода по вертикали.

Содержание кислорода в придонных слоях воды прибрежных районов вообще низкое, несмотря на то, что различия в температуре воды поверхностных и придонных слоев невелики. Исключение составляют короткие периоды охлаждения воды с поверхности (с июня по август) и интенсивного перемешивания. Понижение содержания кислорода в придонных слоях усиливается в те периоды, когда донные отложения имеют более высокую температуру, чем вышерасположенные слои воды (обычно в январе—апреле). В этих условиях пришедшие холодные воды, также сравнительно обедненные кислородом, сначала способствуют некоторому его увеличению, а затем резко к уменьшению не только в сравнительно небольшом по толщине придонном слое, но и во всей толще гипolimниона, так как клин холодной воды приподнимает более теплые с малым содержанием кислорода воды на более высокие уровни (до 4—5 м).

Внутренние сейши оказывают влияние на обмен веществ в озере. Во-первых, движение слоев воды воздействует непосредственно на скорость переноса растворенных веществ и взвешенных частиц в воде. Это обстоятельство иллюстрируется в работе Фиша, указывающего на обмен веществ между при-

брежными и открытыми районами озера. Во-вторых, это движение может вызвать в гипolimнионе турбулентную диффузию, обеспечивающую вертикальный перенос растворенных питательных веществ, поступающих в водные слои с поверхности ила.

Стратификация воды в оз. Виктория способствует уменьшению планктонных организмов, в частности *Melosira*. Некоторые представители этого вида в период стратификации опускаются в нижние слои воды и даже оседают на дно, а они составляют важную часть пищи многих видов рыб озера. Таким образом, рыбы подвергаются в период стратификации не только влиянию плохой аэрации в гипolimнионе, но и влиянию колебаний количества пищи (планктонных диатомов), что приводит к миграции рыб, а иногда и к замору.

ГЛАВА III

МЕТОДЫ РАСЧЕТОВ ЭЛЕМЕНТОВ СЕЙШ

ФОРМУЛА МЕРИАНА

Формула Мериана позволяет рассчитать только периоды сейш и не дает возможности определить положение узловых линий. Расчет при помощи этой формулы крайне прост. Как известно, формула Мериана имеет вид $T_n = \frac{1}{n} \frac{2L}{\sqrt{gh}}$.

В этой формуле g — ускорение силы тяжести, величина которого изменяется в зависимости от широты и высоты места. Однако в пределах точности при пользовании формулой Мериана для вычисления периодов сейш можно принять ускорение силы тяжести постоянным и равным $9,81 \text{ м/сек}^2$. В самом деле, ускорение силы тяжести в зависимости от широты на уровне моря может быть вычислено по следующей приближенной формуле:

$g_\varphi = 978,049 (1 + 0,005288 \sin 2\varphi - 0,000006 \sin^2 2\varphi) \text{ см/сек}^2$.
Вычисленные по этой формуле g_{45} и g_{77} (в интервале широт СССР) оказываются равными $g_{45} = 9,804$ и $g_{77} = 9,830 \text{ м/сек}^2$, откуда следует, что наибольшее отклонение величины g_φ от $g = 9,81 \text{ м/сек}^2$ равно всего лишь $0,020 \text{ м/сек}^2$, что меньше $0,2\%$.

Поправка на высоту места может быть вычислена по формуле $\Delta g_H = -0,0003086 H \text{ см/сек}^2$, где H — высота в метрах. Даже для высоты 1500 м над уровнем моря эта поправка равна $1,5 \text{ см/сек}^2$. Приведенные данные подтверждают сделанный ранее вывод, что в пределах точности можно принять $g = 9,81 \text{ м/сек}^2$.

Если в формуле Мериана заменить $\frac{2}{\sqrt{g}} = 0,6306$, то формула эта примет еще более простой вид

$$T_n = 0,6306 \frac{L}{n\sqrt{h}} \text{ сек.} \quad (3,1)$$

Длина озера измеряется по оси водоема. Средняя глубина вычисляется делением объема вод озера W на площадь его водной поверхности V . Последняя измеряется планиметрированием по карте возможно крупного масштаба. Объем вод озера определяется по батиметрической карте при помощи общепринятых в гидрологии приемов.

Расчеты по формуле Мериана во многих случаях дают хорошие результаты, но иногда приводят и к большим ошибкам. Так, например, если для оз. Лох-Эрн в Шотландии и оз. Джордж в Новом Южном Уэльсе расчеты по этой формуле дают отличные результаты, то для Женевского озера ошибка по сравнению с фактическими данными составляет почти 25%. По данным Дж. Праудмэна, период одноузловой сейши на оз. Лох-Эрн, вычисленный по формуле Мериана, равен 14 мин при 14,5-минутном наблюдаемом периоде. По данным Рассела, для оз. Джордж вычисленный период составляет 136 мин, наблюдаемый — 131 мин. Для оз. Женевского, по данным Фореля, вычисленный период 59 мин, наблюдаемый — 73,5 мин. Расчеты по формуле Мериана периодов многоузловых сейш дают большие ошибки, чем расчеты периодов одноузловых сейш. Ниже будет показано, что формуле Мериана следует придать более широкое толкование, чем это делалось до сих пор.

Для расчета в первом приближении периодов сейш в бухтах с широким выходом в озеро следует пользоваться несколько видоизмененной формулой Мериана. Узловая линия в таких бухтах находится на выходе из бухты в озеро и, таким образом, длина бухты составляет не $\frac{1}{2}$, а $\frac{1}{4}$ длины волны. В соответствии с этим период сейш в таких бухтах нужно рассчитывать по следующей формуле:

$$T = \frac{4L}{\sqrt{gh}},$$

где L — длина бухты; h — средняя ее глубина. Если так же, как и для формулы Мериана, заменить $\frac{4}{\sqrt{g}} = 1,2612$, то расчетная формула примет вид

$$T = 1,2612 \frac{L}{\sqrt{h}} \text{ сек.}$$

Эта формула предложена японскими учеными для бухт прямоугольной формы постоянной глубины. Применение ее для бухт, отличающихся от указанных свойств, может привести к значительным ошибкам.

МЕТОД ДЮБУА

Как указывалось выше, формула Дюбуа имеет вид

$$T = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum \frac{4a_i}{\sqrt{h_{i-1}} + \sqrt{h_i}} \text{ сек.}$$

При вычислении периода сейш по методу Дюбуа ось озера предварительно подразделяется на некоторое число частей и определяется длина каждого участка (a_i). В случае, если ось озера была разделена на равные участки, а, следовательно, a_i есть величина постоянная, то формула Дюбуа принимает более простой вид

$$T = \frac{4a}{\sqrt{g}} \sum \frac{1}{\sqrt{h_{i-1}} + \sqrt{h_i}} \text{ сек.} \quad (3,2)$$

Величина h_i — глубина озера на вертикали в точке пересечения продольной оси озера i -м поперечным сечением. Глубины эти определяются по батиметрической карте. Ускорение силы тяжести, так же как и в формуле Мериана, можно принять постоянным и равным $9,81 \text{ м/сек}^2$.

М. В. Ремезова [43] предложила усовершенствовать метод Дюбуа. Период одноузловой сейши в общем виде может быть определен, следуя Дюбуа, по формуле

$$T_1 = \frac{2}{\sqrt{g}} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{h}} \text{ сек.} \quad (3,3)$$

Формула Дюбуа была выведена ее автором в предположении, что ширина озера (b) постоянна.

Умножая числитель и знаменатель в подынтегральном выражении формулы (3.3) на b , получим

$$T_1 = \frac{2}{\sqrt{g}} \int_0^l \frac{b dx}{b \sqrt{h}} = \frac{2}{\sqrt{g}} \int_0^l \frac{b dx}{\sqrt{b^2 h}} \text{ сек.} \quad (3,4)$$

Вспомним, что при выводе уравнения Кристала было принято $dv = b \cdot dx$. Так как, кроме того, $b^2 \cdot h = b \cdot b \cdot h = Ab$, где A — площадь поперечного сечения, а $Ab = \sigma$ (ордината нормальной кривой по Кристалу), то можно записать

$$T_1 = \frac{2}{\sqrt{g}} \int_0^l \frac{dv}{\sqrt{\sigma}} \text{ сек.} \quad (3,5)$$

Значения интеграла в этой формуле могут быть найдены либо методом трапеций, либо графически. Но следует иметь в виду, что так как для концов озера величины $\frac{dv}{\sqrt{\sigma}}$ полу-

чаются бесконечно большими, то нужно ограничить подсчеты вертикальными сечениями, близкими к концам озера, но имеющими конечные значения σ , отличные от 0. Иными словами, необходимо ограничить озеро искусственными вертикальными сечениями на концах озера, достаточно близко расположенными к этим концам.

Метод Дюбуа в его первоначальном виде и усовершенствованный М. В. Ремезовой дает обычно преувеличенные величины периодов сейш. Существенным недостатком этого метода является предположение о том, что периоды сейш с различным числом узлов находятся в следующих отношениях:

$$T_1:T_2:T_3:\dots:T_n=1:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\dots:\frac{1}{n}.$$

Как правило, эти соотношения не соответствуют действительности.

МЕТОД КРИСТАЛА

Решение основного уравнения Кристалла

$$m^2P + g\sigma \frac{d^2p}{dv^2} = 0$$

в общем виде невозможно, так как, как уже отмечалось ранее, нормальная кривая озера обладает обычно довольно сложными очертаниями и не может быть выражена аналитически. По этой причине для нахождения значений m (частота колебаний) можно либо приближенно интегрировать основное уравнение Кристалла, либо заменить нормальную кривую приближенной кривой, для которой можно было бы решить уравнение Кристалла в конечном виде. По мнению М. В. Ремезовой [43] и японского ученого Хидака [70], первый способ может быть осуществлен при помощи метода Ритца.

Второго способа решения поставленной задачи придерживается Кристал, причем следует подчеркнуть, что он не дает конкретных рекомендаций относительно замены фактической нормальной кривой какой-либо другой приближенной кривой, кроме общего указания на то, что эти кривые должны быть достаточно близки друг к другу, а площади, ограниченные ими, должны незначительно отличаться друг от друга. Отсюда неизбежно вытекает некоторый произвол при такой замене.

Уравнение Кристалла может быть решено в конечном виде в случае замены нормальной кривой горизонтальной прямой, наклонной прямой, двумя наклонными прямыми, образующими с осью абсцисс треугольник, тремя отрезками прямых, образующими с осью абсцисс трапецию, ломаной линией, состоящей из того или иного числа прямых отрезков, и, наконец, кривой линией, выраженной уравнением $\sigma = h(a^2 - x^2)^2$. Последняя

замена хотя и дает возможность решения уравнения Кристалла в конечном виде, но сопровождается столь сложными вычислительными операциями, что делает на практике такую замену трудно используемой, в связи с чем этот случай в дальнейшем рассматриваться не будет.

Рассмотрение применения метода Кристалла к вычислению периодов и положений узловых линий начнем со случая, когда нормальная кривая заменена наклонной прямой (рис. 9, а). Уравнение прямой OA можно записать в виде $\sigma = Mv$, где M — тангенс угла, образуемого прямой OA с осью абсцисс, равный $\frac{\sigma_M}{V}$, причем σ_M — максимальное значение σ , а V — площадь водной поверхности озера. Очевидно, что

$$\frac{d\sigma}{dv} = M. \quad (3,6)$$

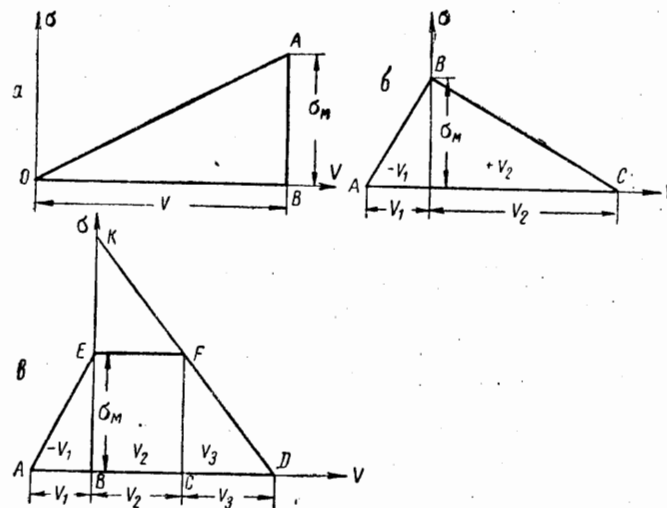


Рис. 9. Нормальные кривые.

а — в виде наклонной линии; б — в виде двух наклонных линий; в — в виде трапеции.

Подставим вместо $\sigma = Mv$ в основное уравнение Кристалла, получим

$$m^2P + gMv \frac{d^2P}{dv^2} = 0. \quad (3,7)$$

Введем новую переменную $v_1 = kv$. Очевидно, что $dv_1 = kdv$, откуда $dv = \frac{dv_1}{k}$, а $dv^2 = \frac{dv_1^2}{k}$ и, следовательно,

$$\frac{d^2P}{dv^2} = k^2 \frac{d^2P}{dv_1^2}.$$

Уравнение (3,7) можно переписать в виде

$$m^2P = gMv_1k \frac{d^2P}{dv_1^2} = 0. \quad (3,8)$$

Выберем k так, чтобы $\frac{gMk}{m^2} = 4$, тогда

$$gMk = 4m^2, \quad (3,9)$$

а

$$k = \frac{4m^2}{gM}.$$

Так как $v_1 = kv$, то

$$v_1 = \frac{4m^2v}{gM}. \quad (3,10)$$

Заменив в уравнении (3,8) gMk найденным выражением:

$$m^2P + 4v_1m^2 \frac{d^2P}{dv_1^2} = 0,$$

и сократив на m^2 получим

$$P + 4v_1 \frac{d^2P}{dv_1^2} = 0. \quad (3,11)$$

Введем новую переменную $x = \sqrt{v_1}$, откуда $v_1 = x^2$, а, следовательно, $\frac{dv_1}{dx} = 2x$ и $\frac{d^2v_1}{dx^2} = 2$. Известно, что

$$\frac{d^2P}{dv_1^2} = \frac{\frac{d^2P}{dx^2} \frac{dv_1}{dx} - \frac{d^2v_1}{dx^2} \frac{dP}{dx}}{\left(\frac{dv_1}{dx}\right)^3}.$$

Подставим в это выражение найденные значения $\frac{dv_1}{dx}$ и $\frac{d^2v_1}{dx^2}$, получим

$$\frac{d^2P}{dv_1^2} = \frac{2x \frac{d^2P}{dx^2} - 2 \frac{dP}{dx}}{8x^3} = \frac{x \frac{d^2P}{dx^2} - \frac{dP}{dx}}{4x^3}. \quad (3,12)$$

В уравнение (3,11) вместо $\frac{d^2P}{dv_1^2}$ подставим выражение (3,12), после простейших преобразований

$$P + \frac{d^2P}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{dP}{dx} = 0. \quad (3,13)$$

Введем новую переменную u так, чтобы она удовлетворяла условию $P = xu$. Продифференцируем это выражение по x , получим $\frac{dP}{dx} = u + xu'$ и $\frac{d^2P}{dx^2} = 2u' + xu''$.

Подставим в уравнение (3,13) найденные выражения, будем иметь

$$xu + xu'' - \frac{1}{x}(u + xu') = 0.$$

После простейших преобразований последнее уравнение может быть приведено к виду

$$u'' + \frac{u'}{x} + u\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 0. \quad (3,14)$$

Полученное уравнение (3,14) представляет собой частный случай уравнения Бесселя. Это уравнение решается при помощи функций Бесселя $I_n(x)$ и Неймана $Y_n(x)$. Так как в нашем случае $n=1$, то решение уравнения (3,14) будет иметь вид

$$u = C_1 I_1(x) + C_2 Y_1(x), \quad (3,15)$$

где C_1 и C_2 — некоторые постоянные.

Принимая во внимание, что $P = xu$, можно записать

$$P = xC_1 I_1(x) + xC_2 Y_1(x). \quad (3,16)$$

Отсюда нетрудно получить

$$\frac{dP}{dv} = \frac{dP}{dx} \frac{dx}{dv} = \frac{dx}{dv} \frac{d}{dx} [xC_1 I_1(x) + xC_2 Y_1(x)]. \quad (3,17)$$

Ранее было принято $v_1 = x^2$ и, согласно формуле (3,10),

$$v_1 = \frac{4m^2v}{gM},$$

откуда

$$x^2 = \frac{4m^2v}{gM}.$$

После дифференцирования этого выражения по x имеем:

$$\frac{dx}{dv} = \frac{2m^2}{gM} \frac{1}{x}.$$

Подставим найденное выражение в уравнение (3,17), получим

$$\frac{dP}{dv} = \frac{2m^2}{gM} \frac{1}{x} \frac{dP}{dx} = \frac{2m^2}{gM} \frac{1}{x} \left\{ \frac{d}{dx} [xC_1 I_1(x) + xC_2 Y_1(x)] \right\}. \quad (3,18)$$

Из курса высшей математики известно, что

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} [xI_1(x)] = I_0(x), \quad (3,19)$$

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} [xY_1(x)] = Y_0(x). \quad (3,20)$$

После подстановки выражений (3,19) и (3,20) в уравнение (3,18) нетрудно получить

$$\frac{dP}{dv} = \frac{2m^2}{gM} [C_1 I_0(x) + C_2 Y_0(x)]. \quad (3,21)$$

В точках на оси озера, где образуются пучности, $P=0$. Пучности одноузловой сейши наблюдаются на концах оси водоема, т. е. при $v=0$ и $v=V$. Если $v=0$, то и $v_1=0$ и $x=0$. Известно, что $xY_1(x)=-1$ при $x=0$, выражение же $xI_1(x)$ равно 0 при $x=0$. Так как $P=0$ при $x=0$, то $x C_1 I_1(x) + x C_2 Y_1(x) = 0$ при том же значении x . Но так как при этом $x C_1 I_1(x) = 0$, то, следовательно, $x C_2 Y_1(x) = 0$, а $C_2 = 0$. В таком случае формулы (3,16) и (3,21) примут вид:

$$P = x C_1 I_1(x) = 0, \quad (3,22)$$

$$\frac{dP}{dv} = \frac{2m^2}{gM} C_1 I_0(x) = 0. \quad (3,23)$$

Как указывалось выше, $P=0$ и при $v=V$. Так как $x = \frac{4m^2 v}{gM}$, то $x = \frac{2m\sqrt{V}}{\sqrt{gM}}$ при $v=V$. Заменив в полученной формуле $M = \frac{\sigma_M}{V}$, получим, что при $v=V$

$$x = \frac{2mV}{\sqrt{g\sigma_M}}. \quad (3,24)$$

Таким образом, x при $v=V$ есть величина, отличная от 0, в то же время и $C_1 \neq 0$. Отсюда следует, что для того, чтобы $P(V)=0$, необходимо и достаточно, чтобы $I_1(x)=0$. По таблицам значений функций Бесселя [53] находим, что $I_1(x)=0$ при $x=3,832$, следовательно, $\frac{2mV}{\sqrt{g\sigma_M}} = 3,832$. Решая это уравне-

ние относительно m , найдем $m = \frac{3,832\sqrt{g\sigma_M}}{2V}$, откуда, так как

$$T_1 = \frac{2\pi}{m},$$

$$T_1 = 3,279 \frac{V}{\sqrt{g\sigma_M}} \text{ сек.} \quad (3,25)$$

Если принять $g=9,81 \text{ м/сек}^2$, то $T_1 = 1,047 \frac{V}{\sqrt{g\sigma_M}} \text{ сек.}$

Эта формула позволяет определить период одноузловой сейши, если нормальная кривая представляет собой наклонную к оси абсцисс прямую.

Для нахождения периода двухузловой сейши нужно по таблицам функций Бесселя определить следующий корень уравнения $I_1(x)=0$, $x=7,0156$.

Сделав аналогичный расчет, получим

$$T_2 = 0,572 \frac{V}{\sqrt{g\sigma_M}} \text{ сек.} \quad (3,26)$$

Попробуем сравнить результаты расчетов по полученным формулам и по формуле Мернана. Для этого рассмотрим водоем, изображенный на рис. 10 и представляющий собой призму, одна грань которой ($ABCD$) является водной поверхностью водоема и имеет форму прямоугольника. Следовательно, ширина водоема постоянна (b). Пусть длина водоема L ; тогда площадь его водной поверхности $V=Lb$. Нетрудно убедиться в том, что нормальная кривая этого водоема есть прямая линия, наклонная к оси абсцисс. В самом деле, площадь любого, например i -го поперечного, сечения водоема $A_i = h_i b$, где h_i — глубина этого сечения. Ордината нормальной кривой $\sigma_i = A_i b = h_i b^2$. Умножим и разделим правую часть полученного равенства на x_i — где x_i — расстояние от начала координат (левый берег) до i -го сечения. Получим

$$\sigma_i = \frac{h_i b^2 x_i}{x_i} = \frac{h_i b x_i}{x_i} = \frac{h_i v_i b}{x_i},$$

где v_i — площадь водной поверхности водоема от начала координат до i -го сечения. Из подобия треугольников DEK и DCF следует $\frac{EK}{DE} = \frac{CF}{DC}$, или $\frac{h_i}{x_i} = \frac{h_M}{L}$. Подставив вместо $\frac{h_i}{x_i}$ в выражение для σ_i $\frac{h_M}{L}$, получим $\sigma_i = \frac{h_M b}{L} v_i$. Здесь, так же как и в предыдущем выражении, h_M — максимальная глубина водоема у правого берега. Умножим числитель и знаменатель полученной дроби на b , получим $\sigma_i = \frac{h_M b^2}{Lb} v_i = \frac{\sigma_M}{V} v_i$, т. е. уравнение прямой линии с угловым коэффициентом $M = \frac{\sigma_M}{V}$.

Таким образом, нормальная кривая рассматриваемого водоема действительно есть прямая линия, наклонная к оси абсцисс.

Применим формулы (3,25) и (3,26) для вычисления периодов одно- и двухузловой сейш нашего водоема. Заменим в этих

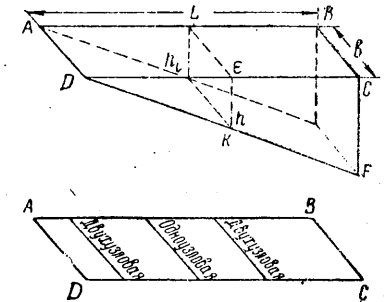


Рис. 10. Призматический водоем и расположение узловых линий в этом водоеме.

формулах $V=Lb$ и $\sigma_M=b^2h_M$. Заметим при этом, что средняя глубина рассматриваемого водоема $h=\frac{1}{2}h_M$, или $h_M=2h$.

$$T_1=3,279 \frac{bL}{\sqrt{gb^2h_M}}=3,279 \frac{L}{\sqrt{gh_M}}=3,279 \frac{2L}{2\sqrt{g2h}}=$$

$$1,139 \frac{2L}{\sqrt{gh}}=1,139 T_{1(M)},$$

где $T_{1(M)}$ — период одноузловой сейши, вычисленный по формуле Мериана.

Поступая аналогичным образом, получим период двухузловой сейши $T_2=1,266 T_{2(M)}$. Из приведенных данных видно, что периоды сейш, вычисленные по этой формуле, значительно отличаются от периодов, вычисленных по методу Кристала, причем различие для двухузловой сейши больше, чем для одноузловой.

Найдем положение узловых линий на поверхности рассматриваемого бассейна, пользуясь методом Кристала. В узловых точках $\frac{\partial P}{\partial v}=0$; в таком случае из уравнения (3,23) следует, что $I_0(x)=0$. Находим по таблицам функций Бесселя значение x , при котором $I_0(x)=0$. Это условие соблюдается при $x=2,405$. Так как $x^2=\frac{4m^2v}{gM}$, то $\frac{4m^2v}{gM}=2,405^2$, откуда $v=\frac{2,405^2 gM}{4m^2}$. Подставим в найденное выражение вместо $m=\frac{3,832\sqrt{g\sigma_M}}{2V}$ и вместо $M=\frac{\sigma_M}{V}$; после простейших преобразований получим

$$v=0,394 V. \quad (3,27)$$

Таким образом, узловая линия одноузловой сейши в бассейне, нормальная кривая которого представляет собой наклонную к оси абсцисс прямую линию, отсекает от конца мелководной части водоема 0,394 площади всей его водной поверхности. В случае двухузловой сейши после аналогичных расчетов оказывается, что одна из узловых линий отсекает от левой части водоема 0,118, другая — 0,620 всей площади его водной поверхности. На рис. 10 показана схема расположений узловых линий одно- и двухузловой сейш рассматриваемого озера.

Рассмотрим случай, когда нормальная кривая представляет собой две пересекающиеся прямые линии (см. рис. 9, б). Поместим начало координат таким образом, чтобы ось ординат проходила через вершину треугольника ABC . Пусть по-прежнему площадь водной поверхности озера V , максимальная ордината нормальной кривой (на рис. 9, б высота треуголь-

ника) — σ_M . Часть водной поверхности озера до поперечного сечения, соответствующего максимальной ординате нормальной кривой, обозначим через V_1 , а площадь остальной части водной поверхности — через V_2 . Очевидно, $V=V_1+V_2$. При $v=-V_1$ (точка А) $\sigma=0$, равным образом и при $v=V_2$ (точка С) $\sigma=0$, а при $v=0$ ордината нормальной кривой достигает максимума.

Метод решения задачи остается тот же, что и в предыдущем случае. Уравнение прямой AB имеет вид

$$\sigma_1=\sigma_M\left(1+\frac{v}{V_1}\right),$$

или

$$\sigma_1=M_1(v+V_1). \quad (3,28)$$

Здесь $M_1=\frac{\sigma_M}{V_1}$, а, следовательно, $\frac{d\sigma_1}{dv}=M_1=\frac{\sigma_M}{V_1}$.

Уравнение прямой BC

$$\sigma_2=\sigma_M\left(1-\frac{v}{V_2}\right),$$

или

$$\sigma_2=\frac{\sigma_M}{V_2}(V_2-v), \quad (3,29)$$

где

$$\frac{d\sigma_2}{dv}=-\frac{\sigma_M}{V_2}=M_2.$$

Проведем все те же операции, что и в предыдущем случае для того, чтобы свести решение поставленной задачи к уравнению типа Бесселя. Сделаем это отдельно для прямой AB и прямой BC , составляющих нормальную кривую.

Введем новую переменную $v_1=k_1(V_1+v)$, причем коэффициент k_1 выберем так, чтобы $\frac{gMk_1}{m^2}=4$. Отсюда $k_1=\frac{4m^2}{gM_1}$, а, следовательно, $v_1=\frac{4m^2(V_1+v)}{gM_1}$. Введем еще одну новую переменную $x_1=\sqrt{v_1}=\frac{2m\sqrt{V_1+v}}{\sqrt{gM_1}}$. Заменяем в полученной дроби $M_1=\frac{\sigma_M}{V_1}$, получим

$$x_1=\frac{2m\sqrt{V_1+v}}{\sqrt{gM_1}}=\frac{2mV_1}{\sqrt{\sigma_M g}}\sqrt{1+\frac{v}{V_1}}. \quad (3,30)$$

Введя принятые переменные в основное уравнение Кристала после преобразований, аналогичных предыдущему случаю, приняв $P=xu$, получим уравнение $y''+\frac{y'}{x}+y\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=0$.

Решение этого уравнения, как известно, может быть представлено в виде

$$y = C_1 I_1(x) + C_2 Y_1(x),$$

а

$$P_1 = xy = x_1 [C_1 I_1(x) + C_2 Y_1(x)]. \quad (3,31)$$

Отсюда нетрудно получить

$$\frac{dP_1}{dv} = \frac{dP_1}{dx_1} \frac{dx_1}{dv} = \frac{dx_1}{dv} \frac{d}{dx_1} \{x_1 [C_1 I_1(x) + C_2 Y_1(x)]\}. \quad (3,32)$$

Возведя обе части уравнения (3,30) в квадрат и продифференцировав это равенство, получим

$$2x_1 dx_1 = \frac{4m^2 V_1^2}{\sigma_M g} \frac{dv}{V_1},$$

откуда

$$\frac{dx_1}{dv} = \frac{2m^2 V_1}{\sigma_M g} \frac{1}{x_1}.$$

После подстановки найденного выражения в формулу (3,32) будем иметь

$$\frac{dP_1}{dv} = \frac{2m^2 V_1}{\sigma_M g} \frac{1}{x_1} \frac{d}{dx_1} \{[x_1 C_1 I_1(x_1) + C_2 Y_1(x_1)]\}$$

или

$$\frac{dP_1}{dv} \frac{2m^2 V_1}{\sigma_M g} [C_1 I_0(x_1) + C_2 Y_0(x_1)]. \quad (3,33)$$

Подобно предыдущему, нетрудно прийти к заключению, что $C_2 = 0$, и тогда уравнения (3,31) и (3,33) примут вид:

$$P_2 = x_2 C_1 I_1(x_2), \quad (3,34)$$

$$\frac{dP_1}{dv} = \frac{2m^2 V_1}{\sigma_M g} C_1 I_0(x_1). \quad (3,35)$$

Аналогичным образом решим уравнения и для второй прямой (BC).

$$P_2 = x_2 C_1' (x_2), \quad (3,36)$$

$$\frac{dP_2}{dv} = -\frac{2m^2 V_2}{\sigma_M g} C_1' I_0(x_2). \quad (3,37)$$

Знак минус у производной $\frac{dP_2}{dv}$ взят потому, что она представляет собой угловой коэффициент прямой BC, образующей тупой угол с осью абсцисс. В приведенных выше уравнениях

$$x_1 = \frac{2m V_1}{\sqrt{\sigma_M g}} \left(1 + \frac{v}{V_1}\right), \quad (3,38)$$

$$x_2 = \frac{2m V_2}{\sqrt{\sigma_M g}} \left(1 - \frac{v}{V_2}\right). \quad (3,39)$$

В точке пересечения прямых AB и BC, т. е. в точке B, должны иметь место равенства $P_1 = P_2$ и $\frac{dP_1}{dv} = \frac{dP_2}{dv}$ при $v = 0$ (абсцисса точки B равна 0). В результате можно записать

$$x_{1,0} C_1 I_1(x_{1,0}) = x_{2,0} C_1' I_1(x_{2,0}),$$

где $x_{1,0}$ и $x_{2,0}$ — значения x_1 и x_2 при $v = 0$. Из формул (3,38) и (3,39) следует, что

$$x_{1,0} = \frac{2m V_1}{\sqrt{\sigma_M g}}, \quad x_{2,0} = \frac{2m V_2}{\sqrt{\sigma_M g}}.$$

Основываясь на том, что $P_1 = P_2$, можно записать

$$\frac{I_1(x_{1,0})}{I_1(x_{2,0})} = \frac{x_{2,0} C'}{x_{1,0} C_1} = \frac{V_2 C'}{V_1 C_1}. \quad (3,40)$$

Кроме того,

$$\frac{dP_1}{dv} = \frac{2m^2 V_1}{\sigma_M g} P_1 I_0(x_{1,0}) = \frac{dP_2}{dv} = -\frac{2m^2 V_2}{\sigma_M g} C_1' I_0(x_{2,0}).$$

Из этого равенства следует, что

$$\frac{I_0(x_{1,0})}{I_0(x_{2,0})} = -\frac{V_2 C'}{V_1 C_1}. \quad (3,41)$$

Сравнивая равенства (3,40) и (3,41), можно записать

$$\frac{I_1(x_{1,0})}{I_1(x_{2,0})} = -\frac{I_0(x_{1,0})}{I_0(x_{2,0})},$$

откуда

$$I_0(x_{1,0}) I_1(x_{2,0}) + I_0(x_{2,0}) I_1(x_{1,0}) = 0. \quad (3,42)^6$$

Корни уравнения приходится находить методом последовательных приближений. Обозначим для этого левую часть уравнения (3,42) через $f(m)$. Пользуясь методом Мериана, найдем приближенное значение одноузлового периода сейши $T_{1(M)}$, а затем вычислим частоту колебаний $m_1 = \frac{2\pi}{T_{1(M)}}$. Подставим

$m = m_1$ в функцию $f(m)$. Пусть $f(m_1) = +a$. Это значит, что m_1 не является корнем уравнения (3,42). Испытаем другое значение $m = m_2$. Пусть $f(m_2) = -b$. Следовательно, корень исследуемого уравнения лежит между m_1 и m_2 . Возьмем прямоугольную систему координат, в которой по оси абсцисс будем откладывать значения m , а по оси ординат значения $f(m)$. Нанесем в этой системе координат точку A с координатами $x = m_1$ и $y = +a$ и точку B с координатами $x = m_2$ и $y = -b$ (рис. 11) и проведем прямую, соединяющую точки A и B и

⁶ Интересно отметить, что при выводе этого уравнения Кристалом была допущена ошибка (см. М. В. Ремезова [43]).

пересекающую ось абсцисс в точке C . Величину $OC = m_3$ можно принять в первом приближении за корень нашего уравнения. Пусть $f(m_3) = +c$, причем $c < a$. Нанесем в нашей системе координат точку K с координатами $x = m_3$ и $y = +c$ и через три точки A , B и K проведем плавную кривую AKB . Абсцисса точки пересечения этой кривой с осью абсцисс (m_4) и будет вторым приближением корня уравнения (3,42). Если же величина $f(m_4)$ значительно отличается от нуля, то нужно в системе координат нанести новую точку с координатами $x = m_4$ и $y = f(m_4)$ и через четыре точки провести новую плавную кривую. Абсцисса точки пересечения этой кривой с осью абсцисс и будет следующим приближенным значением корня уравнения (3,42). Обычно бывает достаточно трех приближений. Описанный прием известен в математике под названием *regula falsa*.

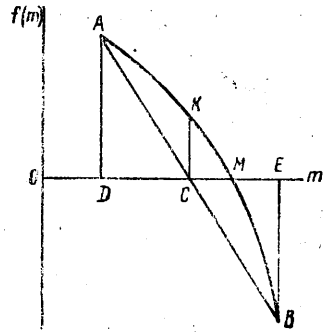


Рис. 11. Графическое нахождение корней уравнения.

Для определения положения узловой линии используем условия $\frac{dP_1}{dv} = 0$ и $\frac{dP_2}{dv} = 0$. Так как $\frac{dP_1}{dv} = \frac{2m^2 V_1}{g^{\sigma_M}} C_1 I_1(x_1) = 0$, то и $I_0(x_1) = 0$. Аналогичным образом получим, что $I_0(x_2) = 0$. Отсюда следует, что корни обоих уравнений равны, т. е. что $x_1 = x_2$ на узловой линии. Из равенства $x_1 = x_2$ следует, что

$$\frac{2m V_1}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} \sqrt{1 + \frac{v}{V_1}} = \frac{2m V_2}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} \sqrt{1 - \frac{v}{V_2}}.$$

Сократив обе части полученного равенства на $\frac{2m}{\sqrt{g^{\sigma_M}}}$, получим

$$V_1 \sqrt{1 + \frac{v}{V_1}} = V_2 \sqrt{1 - \frac{v}{V_2}}.$$

Возведя обе части этого равенства в квадрат и раскрыв скобки, можем записать

$$V_1^2 + v V_1 = V_2^2 - v V_2.$$

Решая это уравнение относительно v , найдем

$$v = \frac{V_2^2 - V_1^2}{V_2 + V_1},$$

или $v = V_2 - V_1$. Очевидно, что если нормальная кривая представляет собой стороны равнобедренного треугольника, т. е. если $V_1 = V_2$, то $v = 0$, а, следовательно, узловая линия расположена по середине озера и делит площадь его поверхности на две равные части.

Для нахождения положения узловой линии на водной поверхности озера нужно построить кривую связи между l_i и v_i , где l_i — расстояние от конца озера до i -го сечения, а v_i — площадь водной поверхности до этого сечения, а затем по этой кривой и найденному значению v определить расстояние от конца озера до узловой линии.

Рассмотрим далее случай, когда нормальная кривая представляет собой ломаную линию, состоящую из отрезков двух наклонных прямых (на краях нормальной кривой) и из отрезка прямой, параллельной оси абсцисс. Таким образом, нормальная кривая и ось абсцисс образуют трапецию (см. рис. 9, в).

Пусть по-прежнему площадь водной поверхности всего озера V . Опустим из вершин трапеции перпендикуляры на ось абсцисс и обозначим отрезок AB через V_1 , отрезок BC — через V_2 и отрезок CD — через V_3 . Максимальную ординату нормальной кривой (высоту трапеции) обозначим через σ_M .

Поместим начало координат в точке B , за ось абсцисс — линию BE , за ось ординат — линию BD . Так же, как и ранее, найдем значения P_1 и $\frac{dP_1}{dv}$ для наклонной прямой AE . Аналогично предыдущему решению основного уравнения Крестала в результате преобразований приводятся к следующему виду:

$$P_1 = x_1 C_1 I_1(x_1),$$

$$\frac{dP_1}{dv} = \frac{2m^2 V_1}{g^{\sigma_M}} C_1 I_0(x_1),$$

где

$$x_1 = \frac{2m V_1}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} \sqrt{1 + \frac{v}{V_1}}.$$

Найдем значение P_2 и $\frac{dP_2}{dv}$ для второго участка, ограниченного прямой EF , параллельной оси абсцисс. Уравнение прямой EF имеет вид $\sigma = \sigma_M$, а, следовательно, основное уравнение Крестала можно записать в виде:

$$m^2 P_2 + g^{\sigma_M} \frac{d^2 P_2}{dv^2} = 0,$$

откуда

$$\frac{d^2 P_2}{dv^2} = - \left(\frac{m}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} \right)^2 P_2.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$P_2 = C_2 \sin \frac{m(v + v_0)}{\sqrt{g^{\sigma_M}}},$$

откуда

$$\frac{dP_2}{dv} = C_2 \frac{m}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} \cos \frac{m(v + v_0)}{\sqrt{g^{\sigma_M}}}, \quad (3,43)$$

где C_2 и v_0 — некоторые постоянные. В правильности этого решения нетрудно убедиться подстановкой найденных выражений P_2 и $\frac{dP_2}{dv}$ в основное уравнение Кристалла.

Так же, как и для первого участка, найдем решение и для третьего участка, т. е. для наклонной линии FD . Предварительно продолжим линию FD до пересечения с осью ординат в точке K и обозначим ординату этой точки через H . Уравнение линии KD , или, что то же самое, линии FD , можно записать так:

$$\frac{\sigma_3}{H} + \frac{v}{V_2 + V_3} = 1; \quad \sigma_3 = H \left(1 - \frac{v}{V_2 + V_3} \right).$$

Проделив операции, аналогичные тем, что были проведены для решения основного уравнения Кристалла в случае нормальной кривой в виде наклонной прямой OA , найдем прежде всего

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{2m(V_2 + V_3)}{\sqrt{Hg}} \sqrt{1 - \frac{v}{V_2 + V_3}} = \\ &= \frac{2m(V_2 + V_3)}{\sqrt{g\sigma_3}} \sqrt{1 - \frac{v}{V_2 + V_3}}. \end{aligned} \quad (3,44)$$

Определим далее $P_3 = x_3 C_3 I_1(x_3)$. Преобразовав равенство (3,44), получим

$$\frac{dx_3}{dv} = - \frac{2m^2(V_2 + V_3)}{Hg x_3}. \quad (3,45)$$

Из подобия треугольников KBD и FCD следует $\frac{KB}{FC} = \frac{BD}{CD}$, или $\frac{H}{\sigma_M} = \frac{V_2 + V_3}{V_3}$, откуда $H = \frac{V_2 + V_3}{V_3} \sigma_M$. Подставим в формулу (3,45) вместо H найденное выражение, после простейших преобразований будем иметь

$$\frac{dx_3}{dv} = - \frac{2m^2 V_3}{g\sigma_M} \frac{1}{x_3}.$$

Так же как и для наклонной прямой AB , для прямой FD можно записать

$$\frac{dP_3}{dv} = \frac{dP_3}{dx_3} \frac{dx_3}{dv} = - \frac{2m^2 V_3}{g\sigma_M} \frac{1}{x_3} \frac{d}{dx_3} [x_3 C_3 I_1(x_3)]$$

или

$$\frac{dP_3}{dv} = - \frac{2m^2 V_3}{g\sigma_M} C_3 I_0(x_3).$$

Сведем все полученные решения основного уравнения Кристалла в одну таблицу.

$$P_1 = x_1 C_1 I_1(x_1); \quad (a) \quad \frac{dP_1}{dv} = \frac{2m^2 V_1}{g\sigma_M} C_1 I_0(x_1); \quad (б)$$

$$P_2 = C_2 \sin \frac{m(v + v_0)}{\sqrt{g\sigma_M}}; \quad (в) \quad \frac{dP_2}{dv} = C_2 \frac{m}{\sqrt{g\sigma_M}} \cos \frac{m(v + v_0)}{\sqrt{g\sigma_M}}; \quad (г)$$

$$P_3 = x_3 C_3 I_1(x_3); \quad (д) \quad \frac{dP_3}{dv} = - \frac{2m^2 V_3}{g\sigma_M} C_3 I_0(x_3). \quad (е)$$

Введем следующие обозначения: $\alpha_1 = \frac{2V_1}{\sqrt{g\sigma_M}}$, $\alpha_3 = \frac{2V_3}{\sqrt{g\sigma_M}}$ и $\alpha_2 = \frac{V_2}{\sqrt{g\sigma_M}}$.

Очевидно, что в точках пересечения отдельных отрезков нормальной кривой величины P и $\frac{dP}{dv}$ должны быть соответственно равны между собой, т. е. имеют место равенства

$$P_1 = P_2 \quad \frac{dP_1}{dv} = \frac{dP_2}{dv} \quad \text{при } v=0 \text{ (точка } E),$$

$$P_2 = P_3 \quad \frac{dP_2}{dv} = \frac{dP_3}{dv} \quad \text{при } v=v_2 \text{ (точка } F).$$

Найдем значения P_1 , P_2 , $\frac{dP_1}{dv}$ и $\frac{dP_2}{dv}$ при $v=0$.

$$P_1 = \frac{2mV_1}{\sqrt{g\sigma_M}} C_1 I_1\left(\frac{2mV_1}{\sqrt{g\sigma_M}}\right) = \alpha_1 m C_1 I_1(\alpha_1 m);$$

$$P_2 = C_2 \sin \frac{mv_0}{\sqrt{g\sigma_M}};$$

$$\frac{dP_1}{dv} = \frac{2m^2 V_1}{\sqrt{g\sigma_M}} C_1 I_0\left(\frac{2mV_1}{\sqrt{g\sigma_M}}\right) = \frac{2m^2 V_1}{\sqrt{g\sigma_M}} C_1 I_0(\alpha_1 m);$$

$$\frac{dP_2}{dv} = C_2 \frac{m}{\sqrt{g\sigma_M}} \cos \frac{mv_0}{\sqrt{g\sigma_M}}.$$

Так как $P_1 = P_2$, то

$$\alpha_1 m C_1 I_1(\alpha_1 m) = C_2 \sin \frac{mv_0}{\sqrt{g\sigma_M}}, \quad (3,46)$$

и так как $\frac{dP_1}{dv} = \frac{dP_2}{dv}$, то

$$\frac{2m^2 V_1}{\sqrt{g\sigma_M}} C_1 I_0(\alpha_1 m) = C_2 \frac{m}{\sqrt{g\sigma_M}} \cos \frac{mv_0}{\sqrt{g\sigma_M}}.$$

Разделив обе части полученного равенства на $\frac{m}{\sqrt{g\sigma_M}}$, получим

$$\frac{2mV_1}{\sqrt{g\sigma_M}} C_1 I_0(\alpha_1 m) = C_2 \cos \frac{mv_0}{\sqrt{g\sigma_M}}$$

или

$$\alpha_1 m C_1 I_0(\alpha_1 m) = C_2 \cos \frac{mv_0}{\sqrt{g^{\sigma_M}}}. \quad (3,47)$$

Разделив уравнение (3,46) на (3,47), получим

$$\frac{I_1(\alpha_1 m)}{I_0(\alpha_1 m)} = \operatorname{tg} \frac{mv_0}{\sqrt{g^{\sigma_M}}}. \quad (3,48)$$

Найдем значения P_2 , P_3 , $\frac{dP_2}{dv}$ и $\frac{dP_3}{dv}$ при $v = V_3$, для чего прежде всего определим x_3 при $v = V_3$:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{2m(V_2 + V_3)}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} \left(1 - \frac{V_2}{V_2 + V_3}\right) = \frac{2m(V_2 + V_3)V_3}{\sqrt{g^{\sigma_M}}(V_2 + V_3)} = \\ &= \frac{2mV_3}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} = \alpha_3 m. \end{aligned}$$

Подставим в P_2 и $\frac{dP_2}{dv}$ вместо $v = V_2$ и в P_3 и $\frac{dP_3}{dv}$ вместо $x_3 = \alpha_3 m$:

$$P_2 = C_2 \sin \frac{m(V_2 + v_0)}{\sqrt{g^{\sigma_M}}},$$

$$P_3 = \alpha_3 m C_3 I_1(\alpha_3 m),$$

$$\frac{dP_2}{dv} = C_2 \frac{m}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} \cos \frac{(V_2 + v_0)}{\sqrt{g^{\sigma_M}}},$$

$$\frac{dP_3}{dv} = -\frac{m\alpha_3 m}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} C_3 I_0(\alpha_3 m).$$

Так как $P_2 = P_3$, то

$$C_2 \sin \frac{m(V_2 + v_0)}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} = \alpha_3 m C_3 I_1(\alpha_3 m). \quad (3,49)$$

С другой стороны, $\frac{dP_2}{dv} = \frac{dP_3}{dv}$, следовательно,

$$C_2 \frac{m}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} \cos \frac{m(V_2 + v_0)}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} = -\frac{m\alpha_3 m}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} C_3 I_0(\alpha_3 m),$$

$$C_2 \cos \frac{m(V_2 + v_0)}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} = -\alpha_3 m C_3 I_0(\alpha_3 m). \quad (3,50)$$

Разделив уравнения (3,49) на (3,50), получим

$$\operatorname{tg} \frac{m(V_2 + v_0)}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} = -\frac{I_1(\alpha_3 m)}{I_0(\alpha_3 m)}. \quad (3,51)$$

Уравнения (3,48) и (3,51) можно переписать иначе:

$$\operatorname{arctg} \frac{I_1(\alpha_3 m)}{I_0(\alpha_3 m)} = \frac{mv_0}{\sqrt{g^{\sigma_M}}}, \quad (3,52)$$

$$-\operatorname{arctg} \frac{I_1(\alpha_3 m)}{I_0(\alpha_3 m)} = \frac{mV_2}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} + \frac{mv_0}{\sqrt{g^{\sigma_M}}}. \quad (3,53)$$

Вычтем почленно из уравнения (3,52) уравнение (3,53), получим

$$\operatorname{arctg} \frac{I_1(\alpha_1 m)}{I_0(\alpha_1 m)} + \operatorname{arctg} \frac{I_1(\alpha_3 m)}{I_0(\alpha_3 m)} = -\frac{mV_2}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} = -\alpha_2 m. \quad (3,54)$$

Преобразуем полученное уравнение так, чтобы избавиться от arctg . Обозначим предварительно

$$\operatorname{arctg} \frac{I_1(\alpha_1 m)}{I_0(\alpha_1 m)} = A \text{ и } \operatorname{arctg} \frac{I_1(\alpha_3 m)}{I_0(\alpha_3 m)} = B.$$

В таком случае уравнение (3,54) можно переписать так: $-\alpha_2 m = A + B$, откуда

$$-\operatorname{tg} \alpha_2 m = \operatorname{tg}(A + B) = \frac{\sin A \cos B + \sin B \cos A}{\cos A \cos B - \sin A \sin B} = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B}.$$

Принимая во внимание, что

$$\operatorname{tg} A = \frac{I_1(\alpha_1 m)}{I_0(\alpha_1 m)} \text{ и } \operatorname{tg} B = \frac{I_1(\alpha_3 m)}{I_0(\alpha_3 m)},$$

полученное выше равенство можно переписать в виде

$$\operatorname{tg} \alpha_2 m = \left[\frac{I_1(\alpha_1 m)}{I_0(\alpha_1 m)} + \frac{I_1(\alpha_3 m)}{I_0(\alpha_3 m)} \right] : \left[\frac{I_1(\alpha_1 m)}{I_0(\alpha_1 m)} \frac{I_1(\alpha_3 m)}{I_0(\alpha_3 m)} - 1 \right].$$

Решая это уравнение относительно m , получим частоту колебаний сейши, а затем и ее период $T_1 = \frac{2\pi}{m}$. Уравнение это в общем виде не решается. Нахождение его корней возможно лишь методом последовательных приближений, так, как это было описано выше. Определим положение узловых линий.

На узловых линиях $\frac{dP}{dv} = 0$. Вспомним, что

$$\frac{dP_1}{dv} = \frac{2m^2 V_1}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} C_1 I_0(x_1),$$

а, следовательно,

$$\frac{2m^2 V_1}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} C_1 I_0(x_1) = 0,$$

откуда $I_0(x_1) = 0$. Ранее было показано, что $I_0(x_1) = 0$ при $x_1 = 2,405$. С другой стороны,

$$x_1 = \frac{2mV_1}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} \sqrt{1 + \frac{v}{V_1}}.$$

Таким образом,

$$\frac{2mV_M}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} \sqrt{1 + \frac{v}{V_1}} = 2,405.$$

Решая это уравнение относительно v , получим

$$v = \frac{14,185\sigma_M}{m^2 \cdot V_1} - V_1. \quad (3,55)$$

Исследуем аналогичным образом участок озера, характеризующийся отрезком нормальной кривой FD (вторая наклонная линия). Для этой прямой

$$\frac{dP_3}{dv} = -\frac{2m^2V_3}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} C_3 I_0(x_3),$$

где

$$x_3 = \frac{2m(V_2 + V_3)}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} \sqrt{1 - \frac{v}{V_2 + V_3}}.$$

Из условия $\frac{dP_3}{dv} = 0$ следует, что $I_0(x_3) = 0$. Последнее равенство возможно, если $x_3 = 2,405$ или

$$\frac{2m(V_2 + V_3)}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} \sqrt{1 - \frac{v}{V_2 + V_3}} = 2,405.$$

Решая это уравнение относительно v , получим

$$v = V_2 + V_3 - \frac{g^{\sigma_M}}{m^2(V_2 + V_3)}. \quad (3,56)$$

Если узловая линия одноузловой сейши находится на участке, описываемом прямой AE , то $v < 0$. Если же при вычислении по формуле (3,55) окажется, что $v > 0$, то это значит, что узловая линия находится вне пределов первого участка.

Для третьего участка $v > V_2$. Если же при вычислении по формуле (3,56) будет $v < V_2$, то узловая линия находится вне пределов третьего участка и ее положение нужно искать на втором участке (линия EF). Для этого нужно использовать уравнение $\frac{dP_2}{dv} = 0$, т. е.

$$C_2 \frac{m}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} \cos \frac{m(v + v_0)}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} = 0.$$

Следовательно,

$$\cos \frac{m(v + v_0)}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{m(v + v_0)}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} &= \frac{\pi}{2} + k\pi, \\ \frac{mv}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} &= \frac{\pi}{2} + k\pi - \frac{mv_0}{\sqrt{g^{\sigma_M}}}. \end{aligned} \quad (3,57)$$

В это уравнение входит v_0 — величина неопределенная. Чтобы исключить ее, поступим следующим образом. Из формул (3,46) и (3,47) известно, что

$$\sin \frac{mv_0}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} = \frac{C_1 \alpha_1 m I_1(\alpha_1 m)}{C_2}$$

и

$$\cos \frac{mv_0}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} = \frac{C_1 \alpha_1 m I_0(\alpha_1 m)}{C_2}.$$

Разделим почленно эти уравнения друг на друга, получим

$$\operatorname{tg} \frac{mv_0}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} = \frac{I_1(\alpha_1 m)}{I_0(\alpha_1 m)}. \quad (3,58)$$

При помощи последней формулы найдем угол $\frac{mv_0}{\sqrt{g^{\sigma_M}}}$, а по знакам числителя и знаменателя дроби в правой части формулы (3,58) определим, в какой четверти находится этот угол.

Так как угол $\frac{mv_0}{\sqrt{g^{\sigma_M}}}$ известен, то равенство (3,58) можно переписать так

$$\frac{mv_0}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} = \operatorname{arctg} \frac{I_1(\alpha_1 m)}{I_0(\alpha_1 m)},$$

а, следовательно,

$$\frac{mv_0}{\sqrt{g^{\sigma_M}}} = \frac{\pi}{2} + k\pi - \operatorname{arctg} \frac{I_1(\alpha_1 m)}{I_0(\alpha_1 m)},$$

откуда

$$v = \frac{\sqrt{g^{\sigma_M}}}{m} \left[\frac{\pi}{2} + k\pi - \operatorname{arctg} \frac{I_1(\alpha_1 m)}{I_0(\alpha_1 m)} \right].$$

В полученной формуле величину k надлежит подобрать так, чтобы вычисленное по этой формуле значение v находилось в пределах второго участка.

На практике при применении метода Кристалла для расчета периодов сейш и положений их узловых линий чаще всего приходится иметь дело с более сложными нормальными кривыми, чем описанные выше. В ряде случаев нормальная кривая схематизируется в ряде ломаной линии, состоящей из нескольких прямых отрезков. Примером может служить такая кривая оз. Мичиган, построенная Ф. Дефантом [62] (см. рис. 4), состоящая из четырех отрезков прямых. Решение задачи в этом случае производится так же, как и в предыдущих случаях. Составляются уравнения для P и $\frac{dP}{dv}$ для каждой из прямых.

В точках пересечения отрезков прямых, из которых состоит нормальная кривая, величины P и $\frac{dP}{dv}$ для каждой из пересекающихся прямых должны быть равны между собой. Решение системы полученных уравнений (методом последовательных приближений) и позволит определить величину m (угловую частоту колебаний), а следовательно, и период сейши.

УТОЧНЕНИЕ МЕТОДА КРИСТАЛА (Предложение Б. Б. Девисона)

Б. Б. Девисоном [9] был предложен такой метод замены фактической нормальной кривой ($\sigma = f(v)$) приближенной нормальной кривой ($\sigma = \Phi(v)$), которая удовлетворяла бы следующему условию: площади, ограниченные кривыми вида $y = \frac{v(V-v)}{f(v)}$ и $y = \frac{v(V-v)}{\Phi(v)}$ и осью абсцисс отличались бы друг от друга возможно меньше. Иначе говоря, необходимо, чтобы

$$\int_0^v \left[\frac{v(V-v)}{f(v)} - \frac{v(V-v)}{\Phi(v)} \right] dv < \varepsilon$$

для любых значений v_1 и v внутри интервала от 0 до V ($0 \leq v_1 \leq v \leq V$), где V — площадь всей водной поверхности озера.

Это условие, согласно Девисону, является достаточным, чтобы: 1) ошибка в определении частоты колебаний в результате замены $\sigma = f(v)$ через $\sigma = \Phi(v)$ была величиной порядка ε , 2) ошибка в определении геометрических характеристик скоростей каждого возмущения была бы также величиной порядка ε .

Поставленная задача решается Б. Б. Девисоном следующим образом. Строится кривая $y' = \frac{v(V-v)}{f(v)}$, где y' — ордината кривой, выраженной приведенным уравнением, соответствующая различным значениям v (в пределах от 0 до V).

Далее строится интегральная кривая путем последовательного приближенного интегрирования указанного уравнения,

т. е. вычисляются последовательно интегралы $\int_0^v \frac{v(V-v)}{f(v)} dv$ при

различных значениях v . Для построенной таким образом кривой подбирается уравнение в аналитической форме, выражающей зависимость y от v .

М. В. Ремезова [43] применила это предложение Девисона к расчету периодов сейш Аральского моря и его частей. При

этом она заменила интегральную кривую параболой вида $\bar{y} = av^2 + bv + c$, где \bar{y} — ордината этой замененной кривой. Продифференцировав обе части уравнения интегральной кривой, Ремезова получила $\bar{y}' = 2av + b$.

Но так как $\bar{y} = \frac{v(V-v)}{\Phi(v)} = 2av + b$, то, следовательно, $\Phi(v) = \frac{v(V-v)}{2av+b}$, а так как $\Phi(v) = \bar{\sigma}$, то $\bar{\sigma} = \frac{v(V-v)}{2av+b}$. В этой формуле, представляющей собой уравнение гиперболы, $\bar{\sigma}$ обозначает ординату нормальной кривой, заменяющей фактическую нормальную кривую. Анализ этой кривой приводит к выводу о возможности использования этого уравнения в общем виде для решения основного уравнения Кристалла только в том случае, если гипербола распадается на две прямые. Уравнение одной из таких прямых Девисон и предлагает использовать как уравнение нормальной кривой, заменяющей фактическую нормальную кривую.

Следует заметить, что как бы ни подбирались коэффициенты уравнения этой прямой, сама эта замена носит весьма приближенный характер. В самом деле, М. В. Ремезова, следуя Девисону, приняла для западной части Аральского моря за приближенную интегральную кривую, описываемую уравнением $\bar{y} = 50v^2 + 2 \cdot 10^8$. В соответствии с этим уравнение дифференциальной кривой получилось в виде $\bar{y}' = 100v$. Для того чтобы перейти к нормальным кривым, нужно вспомнить, что $\bar{\sigma}(v)$ и \bar{y}' связаны между собой равенством $\bar{y}' = \frac{v(V-v)}{\bar{\sigma}(v)}$. Отсюда

находим $\bar{\sigma}(v) = \frac{v(V-v)}{\bar{y}'}$. Подставляя в полученное равенство вместо $\bar{y}' = 100v$, получим

$$\bar{\sigma}(v) = \frac{V-v}{100}.$$

Это уравнение наклонной прямой, отсекающей на оси ординат отрезок $\sigma = \frac{V}{100}$ и на оси абсцисс отрезок $v = V$.

Полученная таким образом нормальная кривая, конечно, будет значительно отличаться от фактической нормальной кривой.

Можно гораздо проще заменить фактическую нормальную кривую наклонной прямой, причем результаты расчета периода одноузловой сейши западной части Аральского моря получаются мало отличающимися от расчетов по методу Девисона. Пусть приближенная нормальная кривая представляет собой наклонную прямую, уравнение которой имеет вид $\sigma = Mv$. Подберем величину M , исходя из предположения, что площади, ограниченные осью абсцисс, фактической и прибли-

женной нормальной кривой, равны между собой. Обозначим площадь, ограниченную фактической нормальной кривой, через F . Площадь треугольника (см. рис. 9,а), т. е. площадь, ограниченная приближенной кривой, также должна быть равна F . Высота этого треугольника численно равна ординате точки A на приближенной нормальной кривой при $v=V$, т. е. $AB=MV$. Площадь треугольника по условию равна Φ и, с другой стороны, эта площадь равна $\frac{1}{2}ABV = \frac{1}{2}v^2M = F$. Отсюда

$M = \frac{2F}{V^2}$, а, следовательно, уравнение наклонной прямой, принятой за приближенную нормальную кривую, будет иметь вид $\sigma = \frac{2F}{V^2} v$.

Случай, когда нормальная кривая представляет собой наклонную прямую, был разобран ранее (см. стр. 50) и, как было показано, сводится к нахождению корня уравнения $I_1(x) = 0$, где x определяется равенством $x = \frac{2m\sqrt{v}}{\sqrt{gM}}$. Подставим в эту формулу вместо $M = \frac{2F}{V^2}$, получим $x = \frac{m\sqrt{2}V^{3/2}}{\sqrt{Fg}}$. Как уже отмечалось ранее, функция $I_1(x)$ обращается в нуль при $x=3,832$, откуда следует, что $\frac{m\sqrt{2}V^{3/2}}{\sqrt{Fg}} = 3,832$. Решая это уравнение относительно m , найдем $m = \frac{3,832\sqrt{Fg}}{\sqrt{2}V^{3/2}}$. Величина же периода сейши определится по формуле $T = \frac{2\pi}{m}$.

По расчетам М. В. Ремезовой период одноузловой сейши, вычисленный по методу Девисона, оказался $T_1 = 37\,384$ сек, а по способу, только что изложенному, $T_1 = 38\,694$ сек. Разница меньше 3,5%.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РИТЦА К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЯ КРИСТАЛА

Вместо приближенного интегрирования основного уравнения Кристалла $m^2P + g\sigma \frac{d^2P}{dv^2} = 0$ можно поставить задачу о приближенном нахождении функции, дающей минимум интеграла $\int_0^V P'^2 dv$, при соблюдении условий:

$$1) \int_0^V \frac{P^2 dv}{g\sigma(v)} = \text{const} = K,$$

$$2) P(0) = 0 \text{ и } P(V) = 0.$$

Задача эта по правилам вариационного исчисления приводится к решению уравнения $P'' + \frac{\lambda P}{g\sigma(v)} = 0$, т. е. к решению основного уравнения Кристалла при тех же граничных условиях $P(0)=0$ и $P(V)=0$.

Доказательство высказанного положения заключается в следующем. Очевидно, что вместо отыскания минимума интеграла $\int_0^V P'^2 dv$ при условии, что $\int_0^V \frac{P^2 dv}{g\sigma(v)} = \text{const} = K$, мы вправе отыскивать минимум интеграла

$$\int_0^V \left(P'^2 - \frac{\lambda P^2}{g\sigma(v)} \right) dv \quad (3,59)$$

при соблюдении тех же условий. Обозначим через P_* функцию, которая дает минимум этого интеграла. Если рассматривать P как переменную функцию, стремящуюся к P_* , то можно записать $P = P_* + \alpha\eta$, где α — величина бесконечно малая, а η — некоторая функция от v . Так как $P=0$ при $v=0$ и $v=V$, то можно полагать, что и P_* при тех же значениях v также равно 0, а следовательно, и $\eta(0)=0$ и $\eta(V)=0$. Подставив в интеграл (3,59) вместо P выражение $P_* + \alpha\eta$, получим

$$\int_0^V \left\{ (P_* + \alpha\eta)^2 - \frac{\lambda (P_* + \alpha\eta)^2}{g\sigma(v)} \right\} dv. \quad (3,60)$$

Очевидно, что, каково бы ни было значение функции $\eta(v)$, удовлетворяющей условиям $\eta(0)=0$ и $\eta(V)=0$, интеграл (3,60) достигнет минимума при $\alpha=0$. Пределы этого интегрирования постоянны; следовательно, после интегрирования получится функция, зависящая только от α . Таким образом, для того чтобы найти минимум интеграла (3,60), нужно продифференцировать его по α и, приравняв α нулю, найти выражение для этой производной, причем это выражение по правилам дифференциального исчисления должно быть равно 0.

Развернув выражение, находящиеся под знаком интеграла, получим

$$\int_0^V \left\{ [P'_* + \alpha\eta'(v)]^2 - \frac{(P_* + \alpha\eta)^2}{g\sigma(v)} \right\} dv = \int_0^V \left\{ P_*'^2 + 2P'_*\alpha\eta(v) + \alpha^2\eta'(v)^2 - \frac{\lambda}{g\sigma(v)} [P_*^2 + 2\alpha P_*\eta(v) + \alpha^2\eta(v)^2] \right\} dv = \Phi. \quad (3,61)$$

Найдем

$$\frac{d\Phi}{d\alpha} = \int_0^V \left\{ 2P'_*\eta(v) + 2\alpha\eta'^2(v) - \frac{\lambda}{g\sigma(v)} [2P_*\eta(v) + 2\alpha\eta(v)^2] \right\} dv.$$

Подставим в найденное выражение $\alpha=0$, можем записать

$$\frac{d\Phi}{d\alpha} = \int_0^V \left\{ 2P'_* \eta(v) - \frac{\lambda}{g^2(v)} 2P_* \eta(v) \right\} dv = 0 \text{ (условие минимума).}$$

После сокращения обеих частей на 2 и почленного интегрирования получим

$$\int_0^V P'_* \eta(v) dv - \int_0^V \frac{\lambda}{g^2(v)} P_* \eta(v) dv = 0. \quad (3,62)$$

Найдем сначала $\int_0^V P'_* \eta(v) dv$, произведя интегрирование по частям, в результате чего будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^V P'_* \eta(v) dv &= [P'_* \eta(v)]_0^V - \int_0^V \eta(v) d(P'_*) = \\ &= [P'_* \eta(v)]_0^V - \int_0^V P''_* \eta(v) dv. \end{aligned}$$

Так как $\eta(0)=0$ и $\eta(V)=0$, то $[P'_* \eta(v)]_0^V=0$, а, следовательно, искомый интеграл $\int_0^V P'_* \eta(v) dv = - \int_0^V P''_* \eta(v) dv$. Подставив полученное выражение в (3,62), сможем записать

$$- \int_0^V P''_* \eta(v) dv - \int_0^V \frac{\lambda P_*}{g^2(v)} \eta(v) dv = 0$$

или

$$\int_0^V \left[P''_* \eta(v) + \frac{\lambda}{g^2(v)} P_* \eta(v) \right] dv = 0.$$

Вынеся в подынтегральном выражении $\eta(v)$ за скобку, получим

$$\int_0^V \eta(v) \left[P''_* + \frac{\lambda}{g^2(v)} P_* \right] dv = 0. \quad (3,63)$$

Очевидно, что при любом значении $\eta(v)$ необходимым и достаточным условием справедливости равенства (3,63) является:

$$P''_* + \frac{\lambda}{g^2(v)} P_* = 0. \quad (3,64)$$

Если вспомнить, что $P = P_* + \alpha \eta(v)$, а уравнения (3,62), (3,63) и (3,64) выведены в предположении, что $\alpha=0$, то $P = P_*$, а, следовательно, уравнение (3,64) примет вид

$$P'' + \frac{\lambda P}{g^2(v)} = 0.$$

Если же в полученном уравнении изменить порядок суммирования, умножить обе части уравнения на $g^2(v)$ и обозначить λ через m^2 , то в окончательном виде его можно написать: $m^2 P + g^2(v) \frac{d^2 P}{dv^2} = 0$, а это и есть уравнение Кристалла.

Для нахождения численных значений λ и T по методу Ритца поступим следующим образом. Известно, что всякую непрерывную функцию на некотором промежутке можно представить в виде полинома $(n+1)$ -й степени, причем чем больше n , тем точнее эта операция. Так как относительно функции P известно, что $P(0)=0$ и $P(V)=0$, то можно записать

$$P = (V-v)(a_1 v + a_2 v^2 + \dots + a_n v^n). \quad (3,65)$$

Значения коэффициентов $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ можно определить, решая задачу о нахождении минимума функции $\int_0^V \left[P'^2 - \frac{\lambda P^2}{g^2(v)} \right] dv$.

Продифференцируем по v выражение (3,65) и подставим найденное значение $\frac{dP}{dv}$ и P в рассматриваемый интеграл. В результате этот последний можно будет рассматривать как функцию от a_1, a_2, \dots, a_n . Условиями, при которых эта функция будет в минимуме, являются равенства нулю ее производных по a_1, a_2, \dots, a_n . В результате получится n уравнений с n неизвестными без свободных членов. Для того чтобы корни этого уравнения не были равны нулю, необходимо и достаточно, чтобы определитель, составленный из коэффициентов этих уравнений, был равен 0.

Ограничим решение поставленной задачи случаем, когда $n=4$, указанный определитель будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} \frac{V^3}{3} - \lambda U_1 & \frac{V^4}{6} - \lambda U_2 & \frac{V^5}{10} - \lambda U_3 & \frac{V^6}{15} - \lambda U_4 \\ \frac{V^4}{6} - \lambda U_2 & \frac{2V^5}{15} - \lambda U_3 & \frac{V^6}{10} - \lambda U_4 & \frac{8V^7}{105} - \lambda U_5 \\ \frac{V^5}{10} - \lambda U_3 & \frac{V^6}{10} - \lambda U_4 & \frac{3V^7}{35} - \lambda U_5 & \frac{V^8}{14} - \lambda U_6 \\ \frac{V^6}{15} - \lambda U_4 & \frac{8V^7}{105} - \lambda U_5 & \frac{V^8}{14} - \lambda U_6 & \frac{4V^9}{63} - \lambda U_7 \end{vmatrix} = 0$$

В этом определителе $U_1 = \int_0^V \frac{v^{i+1} (V-v)}{g^\sigma(v)} dv$. Так, например,

$$U_1 = \int_0^V \frac{v^2 (V-v)}{g^\sigma(v)} dv, \quad U_2 = \int_0^V \frac{v^3 (V-v)}{g^\sigma(v)} dv \text{ и т. д.}$$

В результате развертывания полученного определителя получится довольно громоздкое уравнение четвертой степени с одним неизвестным λ , решение которого в общем виде обычно невозможно. Поэтому корни уравнения приходится отыскивать путем последовательных приближений. Предварительно необходимо в определителе заменить буквенные выражения числовыми величинами. Значения V в любой степени (в данном случае от 2 до 8) находятся либо по таблицам, либо логарифмированием.

Численные значения U определяются графическим путем. Обозначим через $y = \frac{v^2 (V-v)}{g^\sigma(v)}$. Построим графическую зависи-

мость y от v . Очевидно, что $U_1 = \int_0^V y dv = \int_0^V \frac{v^2 (V-v)}{g^\sigma(v)} dv$ чис-

ленно равняется площади, ограниченной построенной кривой, осями координат и прямой $x = V$. Определив эту площадь либо планиметрированием, либо методом трапеций, найдем значение U_1 . Аналогичным образом поступим для определения численных значений U_2, U_3, \dots, U_7 .

Если бы мы ограничились наш полином не величиной a_4 , а величиной a_3 , то получили бы уравнение третьей степени; если бы мы остановились на a_2 , то получилось бы квадратное уравнение, имеющее вид:

$$(U_1 U_3 - U_2^2) \lambda^2 - \left(\frac{2U_1}{15} V^5 - \frac{U_2}{3} V^4 + \frac{U_3}{3} V^3 \right) \lambda + \frac{v^8}{60} = 0.$$

На практике при применении метода Ритца сначала находят значение λ , решая приведенное выше квадратное уравнение. Затем составляется уравнение, содержащее λ в третьей степени, и подстановкой в это уравнение найденного приближенного значения λ проверяют его надежность. В случае, если при такой подстановке окажется, что найденное приближенное значение λ не удовлетворяет уравнению третьей степени, то находят приближенные корни этого уравнения либо по формуле Кардана, либо методом последовательных приближений. Затем составляют уравнение 4-й степени и для него проверяют пригодность найденного корня.

Зная λ , нетрудно определить m по формуле $m = \sqrt{\lambda}$, а затем и $T = \frac{2\pi}{m}$.

Применение метода Ритца к вычислению периода сейш было предложено почти одновременно двумя авторами, независимо друг от друга: в Японии К. Хидака [70] и в Советском Союзе В. П. Симоновым [43].

Основным недостатком метода Ритца является его чрезвычайная громоздкость. Известно, кроме того, что этот метод дает вообще преувеличенные значения величины λ , а следовательно, и преувеличенные значения частоты колебаний (m) и преуменьшенные величины периодов сейш. В этом легко убедиться, если сравнить, например, данные расчетов М. В. Ремезовой [43] периодов сейш различными методами, в том числе и методом Кристалла с применением способа Ритца к решению уравнения Кристалла.⁷ Нельзя согласиться с мнением М. В. Ремезовой, что применение способа Ритца делает метод Кристалла более точным.

Высказанные соображения и чрезвычайная сложность вычислений рассмотренного способа расчетов периодов сейш позволяет прийти к выводу, что не стоит рекомендовать этот способ для практического использования.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРИОДОВ СЕЙШ Л. К. ДАВЫДОВА [7]

Предположим, что нормальная кривая озера представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс и отсекающую на оси ординат отрезок σ_0 . Тогда уравнение такой нормальной кривой может быть записано в виде $\sigma = \sigma_0$.

Подставим в основное уравнение Кристалла вместо σ постоянную величину σ_0 , получим

$$m^2 P + \sigma_0 g \frac{d^2 P}{dv^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2 P}{dv^2} = - \left(\frac{m}{\sqrt{g \sigma_0}} \right)^2 P.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$P = C \sin \frac{m(v + v_0)}{\sqrt{g \sigma_0}}, \quad (3.66)$$

где C и v_0 — некоторые постоянные. Очевидно,

$$\frac{dP}{dv} = C \frac{m}{\sqrt{g \sigma_0}} \cos \frac{m(v + v_0)}{\sqrt{g \sigma_0}}. \quad (3.67)$$

При одноузловой сейше пучности располагаются на концах озера и, следовательно, здесь или горизонтальное смещение равно 0, или площадь поперечного сечения A равна 0, или обе эти величины одновременно равны 0. Отсюда следует, что и $P = 0$, или $C \sin \frac{m(v + v_0)}{\sqrt{g \sigma_0}} = 0$. Напомним, что это равенство справедливо для обоих концов озера, т. е. при $v = 0$ и $v = V$.

⁷ Едва ли правильно называть способ расчета периодов сейш, заключающийся в решении основного уравнения Кристалла при помощи метода Ритца, методом Ритца, так как он не занимался расчетом периодов сейш, а разработал метод решения дифференциального уравнения.

Таким образом, при замене $v=0$ получим $C \sin \frac{mv_0}{\sqrt{g\sigma_0}} = 0$, а это значит, что и $v_0=0$, вследствие чего равенства (3,66) и (3,67) могут быть преобразованы и записаны в виде

$$P = C \sin \frac{mv}{\sqrt{g\sigma_0}} \quad (3,68)$$

и

$$\frac{dP}{dv} = C \frac{m}{\sqrt{g\sigma_0}} \cos \frac{mv}{\sqrt{g\sigma_0}} \quad (3,69)$$

На другом конце озера, где $v=V$, также наблюдается пучность, а следовательно, $\sin \frac{mV}{\sqrt{g\sigma_0}} = 0$, откуда $\frac{mV}{\sqrt{g\sigma_0}} = n\pi$, где n — число узлов.

Из последнего равенства находим

$$m = \frac{n\pi\sqrt{g\sigma_0}}{V}, \text{ а } T = \frac{2l}{n\sqrt{g\sigma_0}} \quad (3,70)$$

Из формулы (3,70) следует, что период одноузловой сейши $T_1 = \frac{2V}{\sqrt{g\sigma_0}}$, двухузловой — $T_2 = \frac{2V}{2\sqrt{g\sigma_0}}$. Очевидно, что периоды сейш, вычисленные в случае, когда нормальная кривая представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс, находятся в следующих соотношениях между собой: $T_1:T_2:T_3:\dots:T_n = 1:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}:\dots:\frac{1}{n}$.

Метод Л. К. Давыдова [7] основан на том, что за нормальную кривую принимается прямая, параллельная оси абсцисс, при условии, что площади, ограниченные этой нормальной кривой и фактической нормальной кривой, равны между собой. При соблюдении этого условия σ_0 представляет собой среднюю ординату фактической нормальной кривой. В самом деле, если площадь, ограниченная линией параллельной оси абсцисс, равна площади, ограниченной фактической нормальной кривой (Φ), то $\Phi = V\sigma_0$, где V — площадь водной поверхности всего озера. Отсюда $\sigma_0 = \frac{\Phi}{V}$, т. е.

σ_0 есть средняя ордината нормальной кривой озера. Расчет периодов сейш по методу Л. К. Давыдова производится по формуле (3,70) и в ряде случаев дает вполне удовлетворительные результаты. По мере увеличения числа узлов точность расчета снижается, так как, согласно исследованиям Кристалла, отношения периодов сейш с различным числом узлов не подчиняются отношениям, приведенным выше.

Найдем положение узловой линии одноузловой сейши. В сечении, где находится узел, вертикальное смещение $\eta=0$, а, следовательно,

$$\frac{dP}{dv} = 0, \text{ или } C \frac{m_1}{\sqrt{g\sigma_0}} \cos \frac{m_1 v_{yz}}{\sqrt{g\sigma_0}} = 0,$$

где v_{yz} — площадь водной поверхности от левого конца озера до сечения, в котором находится узел. Очевидно, что в таком случае

$$\frac{m_1 v_{yz}}{\sqrt{g\sigma_0}} = \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$v_{yz} = \frac{\pi\sqrt{g\sigma_0}}{2m_1}.$$

Подставив в эту формулу вместо

$$m_1 = \frac{\pi\sqrt{g\sigma_0}}{V},$$

получим

$$v_{yz} = \frac{V}{2}.$$

Таким образом, по методу Давыдова узел одноузловой сейши находится в сечении, которое разделяет площадь водной поверхности всего озера на две равные части.

Найдем положение узлов и пучностей двухузловой сейши. Для такой сейши

$$m_2 = \frac{2\pi\sqrt{g\sigma_0}}{V}.$$

У двухузловой сейши две пучности находятся на концах оси озера, третья — где-то в средней ее части. Аналогично предыдущему в сечении, где находится пучность, $P=0$, а, следовательно, $\sin \frac{m_2 v_{пуч}}{\sqrt{g\sigma_0}} = 0$, или $\frac{m_2 v_{пуч}}{\sqrt{g\sigma_0}} = \pi$, откуда $v_{пуч} = \frac{\pi\sqrt{g\sigma_0}}{m_2} =$

$= \frac{V}{2}$. Таким образом, третья пучность, согласно расчетам по методу Давыдова, находится в сечении, разделяющем площадь водной поверхности озера пополам, иначе говоря, положение третьей пучности такой сейши совпадает с положением узловой линии одноузловой сейши.

Положение узловых линий двухузловой сейши определяется так же, как и одноузловой сейши. В сечениях, где находятся узлы, вертикальные смещения равны нулю. В соответствии с этим

$$\frac{dP}{dv} = 0, \text{ или } \cos \frac{m_2' v_{yz(2)}}{\sqrt{g\sigma_0}} = 0,$$

откуда

$$\frac{m_2' v_{yz(2)}}{\sqrt{g\sigma_0}} = \frac{\pi}{2},$$

а, следовательно

$$v_{yz(2)}' = \frac{\pi}{2} : \frac{m_2}{\sqrt{g\sigma_0}}, \text{ или } v_{yz(2)}' = \frac{V}{4}.$$

Таким образом, первый узел двухузловой сейши, по Да-

выдову, находится в сечении, отделяющем от левого конца озера площадь водной поверхности, равную $1/4$ всей водной поверхности водоема.

Для нахождения положения второй узловой линии двухузловой сейши поступим следующим образом. На основании предыдущего полагаем, что

$$\frac{m_2 v_{уз(2)}^*}{\sqrt{g\sigma_0}} = \frac{3\pi}{2},$$

откуда

$$v_{уз(2)}^* = \frac{3}{4} v,$$

т. е. вторая узловая линия двухузловой сейши находится в сечении, отсекающем от левого конца озера площадь водной поверхности, равную $3/4$ всей водной поверхности озера. Аналогичным образом могут быть определены положения узлов и пучностей для сейш с любым числом узлов.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ФОРМУЛЫ МЕРИАНА [8]

Из приведенной выше формулы (3,70) нетрудно вывести формулу Мериана и сделать некоторые интересные выводы. Представим себе, что мы имеем дело с водоемом прямоугольной формы в плане с постоянной глубиной. Ширина этого водоема и площади поперечных сечений — величины постоянные. В таком случае и ординаты нормальной кривой такого водоема являются величинами постоянными. Площадь любого поперечного сечения этого водоема $A = hb$, где h — глубина и b — ширина поперечного сечения и при этом величины постоянные. Следовательно, $\sigma = hb^2 = \sigma_0$. Подставим в формулу (3,70) $V = Lb$, $\sigma_0 = hb^2$, получим

$$T_n = \frac{2V}{n\sqrt{g\sigma_0}} = \frac{2Lb}{n\sqrt{ghb^2}} = \frac{2L}{n\sqrt{gh}}.$$

Это и есть формула Мериана. Строго говоря, формула Мериана должна быть справедлива для исключительно частного случая и притом почти не встречающегося в природе. Между тем применение этой формулы в ряде случаев при расчете периодов одноузловой сейши дает удовлетворительные результаты. Вместе с тем нередко ошибка в определении этих периодов, не говоря уже о периодах двухузловых сейш, бывает довольно значительной. По-видимому, чем более по своим очертаниям озеро отличается от прямоугольника и чем большей изменчивостью характеризуются глубины озера, тем, вероятно, больше ошибка в вычислении периодов сейш по формуле Мериана.

Формуле Мериана можно придать значительно более широкое толкование, чем это сделал автор формулы и последующие

исследователи сейш. Представим себе, что мы имеем дело с водоемом, у которого ширина остается постоянной на всем его протяжении. Допустим, кроме того, что площадь любого поперечного сечения озера, перпендикулярного к его оси, также представляет собой постоянную величину. Очевидно, что при этих условиях и средняя глубина любого поперечного сечения $h = \frac{A}{b}$ есть также величина постоянная.

Если для такого водоема, следуя Кристалу, построить нормальную кривую, выражающую изменение величины σ_0 с изменением площади водной поверхности от конца озера, принятого за начало координат, до данного сечения, то нормальная кривая такого водоема будет представлять собой прямую, параллельную оси абсцисс и отсекающую на оси ординат отрезок σ_0 .

Очевидно, что $\sigma_0 = Ab = hb^2$. Для такого водоема, как это было показано выше, период одноузловой сейши может быть вычислен по формуле $T_1 = \frac{2V}{\sqrt{g\sigma_0}}$.

Площадь водной поверхности рассматриваемого водоема может быть определена следующим образом. Возьмем элементарную площадь (Δv) между двумя смежными поперечными сечениями, находящимися друг от друга на расстоянии ΔL . Очевидно, что $\Delta v = b\Delta L$. Переходя к дифференциалам, можно записать $dv = b dL$. Проинтегрировав это равенство в пределах от 0 до L , получим $V = bL$. Если в формулу (3,70) подставить вместо V и σ_0 найденные выражения, то после простейших преобразований нетрудно получить $T_1 = \frac{2L}{\sqrt{gh}}$, т. е. формулу Мериана.

Таким образом, формула Мериана пригодна для расчета периода одноузловой сейши при соблюдении следующих условий: постоянства ширины и постоянства площади поперечного сечения, а следовательно, и постоянства средней глубины каждого поперечного сечения. Отсюда следует, что прямоугольная в плане форма водоема и прямоугольное поперечное сечение не являются обязательными условиями для возможности применения формулы Мериана к расчету периода одноузловой сейши.

В этом и заключается расширенное толкование формулы Мериана, отмеченное выше. Этим, по-видимому, и объясняется то обстоятельство, что результаты расчетов периодов одноузловых сейш по формуле Мериана оказываются во многих случаях вполне удовлетворительными, и только в тех случаях, когда сформулированные выше условия (постоянство ширины и постоянство площади поперечных сечений) резко нарушаются, ошибки в расчетах по формуле Мериана становятся достаточно большими.

В 1918 г. А. Дефант опубликовал новый (в отличие от существовавших до того времени) метод расчета периодов и положения узлов сейш [60]. Он, так же как и Кристал, исходит из дифференциальных уравнений гидродинамики. Принимая ту же систему координат, Дефант использует уравнения, приведенные выше:

$$\eta = -\frac{1}{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} [A(x) \xi] \quad (3,71)$$

и

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (3,72)$$

Далее Дефант полагает, что решение этих уравнений может быть выражено в виде периодических функций для величин ξ и η , т. е. в виде функций

$$\xi = \xi_0(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \tau\right), \quad (3,73)$$

$$\eta = \eta_0(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \tau\right). \quad (3,74)$$

В этих уравнениях η_0 и ξ_0 не зависят от x , так как они представляют собой максимальные амплитуды вертикальных и горизонтальных смещений частиц воды в различных точках продольного профиля (по длине оси озера).

Продифференцировав уравнения (3,73) два раза по t и уравнение (3,74) один раз по x , получим

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\xi_0(x) \frac{4\pi^2}{T^2} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \tau\right)$$

и

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \eta_0(x)}{\partial x} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \tau\right).$$

Подставив найденные выражения в уравнение (3,72) и сократив обе части полученного уравнения на $\cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \tau\right)$, можем записать

$$\frac{4\pi^2}{T^2} \xi_0 = g \frac{\partial \eta_0}{\partial x}. \quad (3,75)$$

Подставим далее выражения (3,73) и (3,74) в уравнение (3,71), получим

$$\eta_0(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \tau\right) = -\frac{1}{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left[A(x) \xi_0(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \tau\right) \right].$$

Вынеся затем из-под знака дифференциала правой части полученного уравнения выражение $\cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \tau\right)$ и сократив обе

части найденного уравнения на это выражение, окончательно будем иметь

$$\eta_0(x) = -\frac{1}{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} [A(x) \xi_0(x)]. \quad (3,76)$$

Выразим уравнение (3,75) в виде конечных разностей, несколько преобразовав его, получим

$$\Delta \eta_0 = \frac{4\pi^2}{g T^2} \xi_0 \Delta x. \quad (3,77)$$

Проинтегрируем уравнение (3,76) от 0 до некоторого x

$$A(x) \xi_0(x) = -\int_0^x \eta_0(x) b(x) dx,$$

откуда

$$\xi_0(x) = -\frac{1}{A(x)} \int_0^x \eta_0(x) b(x) dx. \quad (3,78)$$

В этих уравнениях η_0 и ξ_0 представляют собой амплитуды вертикальных и горизонтальных смещений частиц воды при свободных колебаниях водной массы. На использовании полученных уравнений и основан метод расчета сейш Дефанта.⁸

Граничные условия для определения периода свободных колебаний (сейш) заключаются в том, что на концах озера $\xi_0 = 0$. Сущность расчета периодов сейш и положения их узловых линий, по Дефанту, заключается в следующем. Так же, как и при применении метода Кристалла, проведем ряд поперечных сечений, перпендикулярных к продольной оси озера и находящихся друг от друга на расстоянии Δx . Обозначим по-прежнему через $b(x)$ ширину поперечного сечения на расстоянии x от конца озера, принятого за начало координат, через $A(x)$ — площадь этого поперечного сечения, через v_i — площадь водной поверхности озера между i -м и $(i-1)$ -м поперечными сечениями.

Вычислим при помощи одного из приближенных методов величину периода одноузловой сейши T_1 и определим значение выражения $\frac{4\pi^2}{g T_1^2} \Delta x = \alpha$. Очевидно, что для данного озера α есть величина постоянная. Подставим в уравнение (3,77) вместо $\frac{4\pi^2}{g T_1^2} \Delta x = \alpha$, получим

$$\Delta \eta_0 = \alpha \xi_0. \quad (3,79)$$

⁸ А. Дефант отмечает, что рассмотренные преобразования уравнений впервые были предложены Р. Штернеком [83], изучавшим связь между волнами в бухтах и приливо-отливными явлениями в открытом море. Но Штернеком не применил этих уравнений к изучению свободных колебаний.

Как уже отмечалось ранее, пограничное условие заключается в равенстве $\xi_0 = 0$. Допустим, что на конце озера при сейше уровень воды поднялся на 100 см. При достаточно большом числе поперечных сечений можно считать, что на протяжении от конца озера до первого сечения изменение величины поднятия уровня ничтожно и что поэтому для всего этого участка величину поднятия можно принять равной 100 см. Для того чтобы уровень воды в первом сечении поднялся до 100 см, необходимо, чтобы, через первое сечение прошла некоторая масса воды Δq , которую можно вычислить по формуле

$$\Delta q = \int_0^{x_1} \eta_0 b(x) dx = \eta_0 \int_0^{x_1} b(x_1) dx,$$

или

$$\Delta q = \eta_0 v_1,$$

так как $v_1 = \int_0^{x_1} b(x) dx$ есть площадь водной поверхности от конца озера до первого сечения. Дефант полагает возможным величину v_1 определять по формуле $v_1 = \frac{b_1}{2} \Delta x$. Зная Δq , нетрудно по формуле (3,78) определить величину $\xi_0 = -\frac{1}{A_1} \int_0^{x_1} \eta_0 b(x) dx = -\frac{\Delta q}{A_1}$, где A_1 — площадь первого сечения.

Отсюда следует, что $\Delta \eta_0 = \alpha \xi_0$, а, следовательно, $\eta_1 = \eta_0 + \Delta \eta_0$.

Таким образом, определяются значения Δq_1 , ξ_1 и η_1 для первого сечения. Аналогичным образом производятся расчеты этих же величин для следующих поперечных сечений. Так, для второго сечения прежде всего определяются величины $b = \frac{b_1 + b_2}{2}$ и $\eta = \frac{\eta_0 + \eta_1}{2}$. Затем при помощи полученных величин вычисляется $\Delta q_2 = \frac{b_1 + b_2}{2} \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} \Delta x$, а затем и $q_2 = q_1 + \Delta q_2$.

Находим далее $\xi_2 = -\frac{q_2}{A_2}$, $\Delta \eta_2 = \alpha \xi_2$ и, наконец, $\eta_2 = \eta_1 + \Delta \eta_2$. Так последовательно производится вычисление величин q , ξ и η для всех поперечных сечений до последнего включительно. Если при этом окажется, что последнее значение q представляет собой величину, достаточно близкую к нулю, то это значит, что период T_1 взят правильно. Если же эта величина значительно отличается от нуля, то следует продолжать аналогичные вычисления для нового значения T_1 и так поступать до тех пор, пока величина q не окажется близкой к нулю.

Положение узловой линии, очевидно, совпадает с положением того поперечного сечения, для которого η окажется равным нулю. Таким образом, для определения положения узло-

вой линии одноузловой сейши (все расчеты, приведенные выше, производились для одноузловой сейши) необходимо построить график изменений величины η по продольному профилю, или, что то же самое, продольный профиль сейши.

В приведенной схеме расчета Дефант принимал, что на участке между двумя смежными поперечными сечениями величина вертикального смещения η остается постоянной. В действительности эта величина меняется. В дальнейшем в целях уточнения Ф. Дефант [62] предположил, что изменение η происходит по прямолинейному закону, в соответствии с чем расчетные формулы приняли иной вид.⁹

Рассмотрим часть водной массы озера между двумя смежными сечениями i -м и $(i+1)$ -м. Сохраняя прежние обозначения, можно записать

$$\xi_{i+1} = -\frac{q_{i+1}}{A_{i+1}}. \text{ Но так как } q_{i+1} = q_i + \Delta q_{i+1}, \text{ то}$$

$$\xi_{i+1} = -\frac{q_i + \Delta q_{i+1}}{A_{i+1}}. \quad (3,80)$$

Согласно принятому ранее $\Delta q_{i+1} = \frac{\eta_i + \eta_{i+1}}{2} v_{i+1}$, или так как $\eta_{i+1} = \eta_i + \Delta \eta_{i+1}$, а, следовательно, $\frac{\eta_i + \eta_{i+1}}{2} = \eta_i + \frac{\Delta \eta_{i+1}}{2}$,

$$\Delta q_{i+1} = \left(\eta_i + \frac{\Delta \eta_{i+1}}{2} \right) v_{i+1}. \quad (3,81)$$

С другой стороны, $\Delta \eta_{i+1} = \frac{\alpha}{2} (\xi_i + \xi_{i+1})$ и, таким образом,

$$\Delta q_{i+1} = \left[\eta_i + \frac{\alpha}{4} (\xi_i + \xi_{i+1}) \right] v_{i+1}.$$

Подставим это выражение в формулу (3,80), получим

$$\xi_{i+1} = -\frac{1}{A_{i+1}} \left\{ q_i + \left[\eta_i + \frac{\alpha}{4} (\xi_i + \xi_{i+1}) \right] v_{i+1} \right\}.$$

Умножив обе части полученного равенства на $\frac{A_{i+1}}{v_{i+1}}$, сможем записать

$$\xi_{i+1} \frac{A_{i+1}}{v_{i+1}} = -\frac{q_i}{v_{i+1}} - \left[\eta_i + \frac{\alpha}{4} \xi_i + \frac{\alpha}{4} \xi_{i+1} \right].$$

Решая это уравнение относительно ξ_{i+1} , получим

⁹ Дефант в работе, опубликованной в 1953 г., не дает вывода этих формул. Приведенные здесь выводы сделаны Л. К. Давыдовым.

$$\xi_{i+1} = -\frac{\frac{q_i}{v_{i+1}} + \eta_i + \frac{\alpha}{4} \xi_i}{\frac{A_{i+1}}{v_{i+1}} + \frac{\alpha}{4}} \quad (3,82)^{10}$$

Это уравнение вместе с формулами

$$\eta_{i+1} = \eta_i + \frac{\xi_i + \xi_{i+1}}{2} \alpha \quad (3,83)$$

и

$$q_{i+1} = q_i + \frac{\eta_{i+1} + \eta_i}{2} v_{i+1} \quad (3,84)$$

позволяет привести расчеты периода сейши по методу Дефанта с большей точностью, чем по предыдущей схеме.

Для первого сечения очевидно, что $\xi_i = \xi_0 = 0$, а также и $q_i = q_0 = 0$. Отсюда следует, что для вычисления ξ_1 нужно подставить в формулу (3,82) $\xi_i = 0$ и $q_i = 0$. В результате такой подстановки формула для вычисления ξ_1 (для первого сечения) примет вид:

$$\xi_1 = -\frac{\eta_0}{\frac{A_1}{v_1} + \frac{\alpha}{4}}, \quad (3,85)$$

а формула для вычисления η_1 :

$$\eta_1 = \eta_0 + \alpha \frac{\xi_1}{2}. \quad (3,86)$$

Расчеты по новым формулам Дефанта надлежит производить следующим образом. Задавись, так же как и в предыдущем случае, произвольным значением η_0 , например $\eta_0 = 100 \text{ см} = 1 \text{ м}$, вычислим по формуле (3,85) величину ξ_1 . Зная ξ_1 , по формуле (3,86) находим η_1 . Далее по формуле (3,84) вычисляем q_2 , причем предварительно находим q_1 по формуле $q_1 = \frac{\eta_0 + \eta_1}{2} v_1$.

Таким образом, у нас будут известны q_1 и q_2 , ξ_1 и η_1 . Далее, пользуясь формулой (3,82), вычисляем ξ_2 , по формуле (3,83) — η_2 и по формуле (3,84) — величину q_3 . Так последовательно продолжаются вычисления для всех поперечных сечений до последнего включительно. Методом последовательных приближений, путем испытания различных значений T_1 , находится истинное значение периода одноузловой сейши.

Для определения периода двухузловой сейши надлежит произвести те же операции, вычислив предварительно период двухузловой сейши (T_2) по одному из приближенных методов.

¹⁰ Дефант в упомянутой работе приводит эту же формулу в несколько ином, более сложном виде. Эту формулу путем простейших преобразований нетрудно привести к виду (3,82).

Положение узловых линий такой же сейши определяется так же, как и одноузловой сейши, построением графика изменений η по продольной оси озера. Точка пересечения построенной кривой с осью абсцисс и даст абсциссу узла, а следовательно, и положение узловой линии.

МЕТОД ЭРТЕЛЯ

Эртель [64] разработал свой метод расчета периодов сейш, основываясь на уравнении длинных волн:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = gA \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{b} \frac{\partial u}{\partial x} \right].$$

В этом уравнении $u = \xi A$, A — площадь поперечного сечения, x — расстояние от левого конца озера до данного поперечного сечения, t — время.

Это уравнение Эртель преобразовывает введением новых переменных

$$Z = \frac{v}{V}, \quad v = \int_0^x b dx, \quad V = \int_0^L b dx.$$

Из приведенных формул следует, что v — ни что иное, как площадь водной поверхности озера от левого берега до сечения, находящегося на расстоянии x от этого берега, V — площадь всей водной поверхности озера, а Z — относительная величина площади v .

Очевидно, что $dv = b dx$, а $dz = \frac{dv}{V} = \frac{b}{V} dx$. Введя эти новые переменные в уравнение длинных волн, приведенное выше, нетрудно после простейших преобразований получить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} - \frac{1}{\varphi(Z)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (3,87)$$

В этом уравнении $\varphi(Z) = \frac{g}{V^2} b(Z) A(Z)$ представляет собой нормальную кривую озера, преобразованную при помощи множителя $\frac{g}{V^2}$.

Если принять u за периодическую функцию и при этом обозначить амплитуду u через $B(z)$ и частоту колебаний через m , то указанная функция может быть выражена в виде $u = B(z) e^{imt}$.¹¹ Продифференцируем эту функцию два раза по z и по t , получим $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = e^{imt} \frac{\partial^2 B(z)}{\partial z^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -m^2 e^{imt} B(z)$. Под-

¹¹ В работе Эртеля [64] и затем Ф. Дефанта [62] амплитуда u обозначена через $A(z)$, но так как в настоящей работе всюду площадь сечения озера выражается через A , то в дальнейшем амплитуда u обозначается через $B(z)$.

ставив найденные выражения в уравнение (3,87), после простейших преобразований можно его привести к виду

$$\frac{\partial^2 B(z)}{\partial z^2} + \frac{m^2}{\varphi(z)} B(z) = 0. \quad (3,88)$$

Для прямоугольного бассейна, т. е. для случая, когда ширина, площадь сечения и глубина — величины постоянные, уравнение (3,88) можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 B_0}{\partial z^2} + \frac{m_0^2}{\varphi_0} B_0 = 0. \quad (3,89)$$

Здесь B_0 — амплитуда; φ_0 — функция φ ; m_0 — частота колебаний одноузловой сейши в прямоугольном бассейне. Известно, что $m_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, а T_0 (период одноузловой сейши) = $\frac{2L}{\sqrt{gh}}$. Отсюда

$$m_0 = 2\pi : \frac{2L}{\sqrt{gh}} = \frac{\pi\sqrt{gh}}{L}, \text{ а } m_0^2 = \frac{\pi^2 gh}{L^2}. \text{ Кроме того, } \varphi_0 = \frac{g}{V^2} b_0 A_0 = \frac{gh}{L^2}. \text{ Пользуясь найденными выражениями } m_0^2 \text{ и } \varphi_0, \text{ получим}$$

$$\frac{m_0^2}{\varphi_0} = \frac{\pi^2 gh}{L^2} : \frac{gh}{L^2} = \pi^2. \text{ Таким образом, уравнению (3,88) можно придать вид } \frac{\partial^2 B_0}{\partial z^2} + \pi^2 B_0 = 0.$$

Решением этого уравнения является

$$B_0 = \sqrt{2} \sin \pi z. \quad (3,90)$$

Для решения уравнения (3,88) Эртель прибегает к обычной замене в теории возмущения:

$$B = B_0 + \Delta B, \quad \varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi \text{ и } \frac{m^2}{\varphi^3} = \frac{m_0^2}{\varphi_0^3} + \Delta\left(\frac{m^2}{\varphi}\right).$$

Подставив эти выражения в уравнение (3,88), принимая во внимание уравнение (3,89) и пренебрегая малыми величинами второго порядка, получим $\frac{\partial^2 (\Delta B)}{\partial z^2} + \frac{m_0^2}{\varphi_0} \Delta B = -\Delta\left(\frac{m^2}{\varphi}\right) B_0$. Правую часть этого уравнения Эртель преобразовывает, исходя из того, что отношение $\frac{\Delta\varphi}{\varphi_0}$ меньше 1. Но, как показал Ф. Дефант [62], на практике это условие соблюдается далеко не всегда. Поэтому Дефант пошел, применяя метод Эртеля, по другому пути и предложил решение уравнения (3,88) в виде формулы для вычисления частоты колебаний одноузловой сейши:

$$m^2 = \frac{m_0^2}{2} \frac{1}{\int_0^1 \frac{\sin^2 \pi z}{\left(1 + \frac{\Delta\varphi}{\varphi_0}\right)} dz}$$

Схема расчета периода одноузловой сейши по приведенной формуле сводится к следующему. Так же, как и при применении методов Кристала и Дефанта, весь водоем делится поперечными сечениями на некоторое число частей. Определяются площади поперечных сечений и их ширина, вычисляются значения $z = \frac{v}{V}$ для каждого сечения, средние глубины

каждого сечения, значения функции $\varphi(z)$, $\varphi_0(z) = \frac{gh}{L^2}$, $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$, значения πz в переводе в градусы, $\sin \pi z$ и $\sin^2 \pi z$, отношения $\frac{\Delta\varphi}{\varphi_0}$ и сумму $1 + \frac{\Delta\varphi}{\varphi_0}$. Затем надлежит вычислить значения функции $\Phi(z) = \frac{\sin^2 \pi z}{1 + \frac{\Delta\varphi}{\varphi_0}}$ и определить численное значение

интеграла, входящего в знаменатель правой части расчетной формулы. Сделать это можно либо графически, предварительно построив график $\Phi(z)$ в зависимости от z , либо аналитически, например способом трапеций. По найденному значению m величина периода одноузловой сейши определится по формуле $T_1 = \frac{2\pi}{m}$. Для расчетов периодов n -узловых сейш можно пользоваться той же формулой, что и для одноузловой сейши, введя только под знак синуса в интеграле множитель n .

МЕТОД ИМПЕДАНСОВ

В 1950 г. была опубликована работа Г. Неймана [77], представляющая собой развитие ранее опубликованной статьи того же автора. Эти обе работы прошли незамеченными в нашей отечественной литературе. За границей Джон Антонио Пепцолли применил метод, названный Нейманом методом импедансов, к расчетам периодов сейш на оз. Пьяве ди Кадора (в Италии)¹² [79].

В природе встречаются озера, обладающие сложными очертаниями в плане и сложным распределением глубин. Нормальные кривые у таких озер могут быть крайне сложными. В этих случаях применение любого из теоретически обоснованных методов расчета периодов сейш оказывается весьма затруднительным и иногда приводит к неверным результатам. Для озер такого рода Нейман ввел понятие импеданса.

Исходя из аналогии гидродинамических колебаний с колебаниями, происходящими в электромагнитной цепи, подобно тому как поступают при решении вопросов, связанных со зву-

¹² Озеро Пьяве ди Кадоре по существу не является озером, а представляет собой водохранилище в верховье р. Пьяве.

ковыми колебаниями, Нейман принял в качестве гидродинамического импеданса колеблющейся массы воды соотношение

$$z_T = \frac{P}{A \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{\max}}. \quad (3,91)$$

Здесь P — амплитуда давления; A — площадь поперечного сечения; $\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{\max}$ — амплитуда скорости.

В сложных системах озерных водоемов, по мнению Неймана, достаточно просуммировать частные импедансы $z_1, z_2, z_3, \dots, z_{n-1}, z_n$, чтобы получить суммарный импеданс, т. е.

$$z_T = \sum_i z_i.$$

Если пренебречь трением, то из условия $z_T = 0$ можно найти частоту колебаний, а следовательно, и их период.

Согласно Нейману, для наиболее важных типов бассейнов колебательной системы импедансы могут быть выражены следующими формулами:

1) для бассейна, закрытого лишь с одной стороны поперечной преградой, площадь которой $A = b\bar{h}$ (b — ширина; \bar{h} — средняя глубина),

$$z = -\frac{iPC}{A} \operatorname{ctg} \frac{mL}{C}; \quad (3,92)$$

2) для бассейна, открытого с обоих концов,

$$z = \frac{iPC}{A} \operatorname{tg} \frac{mL}{C}; \quad (3,93)$$

3) для водоема с узким входом или для длинного канала, имеющего поперечное сечение $A = b\bar{h}$ и длину L ,

$$z = \frac{igmL}{A}. \quad (3,94)$$

Во всех этих формулах $i = \sqrt{-1}$; $C = \sqrt{g\bar{h}}$; $m = \frac{2\pi}{T}$; T — период колебаний; L — длина бассейна; g — ускорение силы тяжести.

Основываясь на положениях теории метода импедансов, Д. Пеццоли [79] применил метод импедансов к водохранилищу на р. Пьяве. Для этой цели Д. Пеццоли рассматривает указанное водохранилище не как единый водоем, а как водоем, состоящий из достаточно большого числа водоемов, расположенных последовательно один за другим. Каждый из таких водоемов образован поперечными сечениями и ограничен ими с обеих сторон, а оба крайних водоема ограничены с одной стороны поперечным сечением (начальным для первого во-

доема и конечным для последнего), а с другой — концами озера. Если обозначить величины импедансов для каждого из этих водоемов через z_1, z_2, \dots, z_n , то общий импеданс

$$z_{\text{общ}} = \sum_1^n z_i.$$

Очевидно, что для начального и конечного частных водоемов, т. е. водоемов, открытых с одного края, применима формула (3,92), а для всех остальных, начиная со второго и кончая предпоследним, — формула (3,93). Таким образом, можно написать

$$z_1 = -\frac{iPC_1}{A_1} \operatorname{ctg} \frac{mL_1}{C_1},$$

$$z_n = -\frac{iPC_n}{A_n} \operatorname{ctg} \frac{mL_n}{C_n}$$

и для всех промежуточных водоемов

$$z_k = +\frac{iPC_k}{A_k} \operatorname{tg} \frac{mL_k}{C_k}.$$

Развернув в этих формулах тригонометрические функции в ряд, ограничиваясь при этом двумя первыми членами, что Пеццоли полагает достаточным для решения поставленной задачи, он получает

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= -\frac{i}{A_1} C_1 \left(\frac{C_1}{mL_1} - \frac{mL_1}{3C_1} \right), \\ z_n &= -\frac{iPC_n}{A_n} \left(\frac{C_n}{mL_n} - \frac{mL_n}{3C_n} \right), \\ z_k &= -\frac{iPC_k}{A_k} \left(\frac{mL_k}{C_k} + \frac{m^2 L_k^3}{3C_k} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3,95)$$

В последней формуле k принимает значения от 2 и до $(n-1)$ включительно.

Для общего же импеданса всего водоема можно записать

$$\begin{aligned} z_{\text{общ}} &= \sum_{k=2}^{n-1} \frac{iPC_k}{A_k} \left(\frac{mL_k}{C_k} + \frac{m^2 L_k^3}{3C_k} \right) - \frac{iPC_1}{A_1} \left(\frac{C_1}{mL_1} - \frac{mL_1}{3C_1} \right) - \\ &\quad - \frac{iPC_n}{A_n} \left(\frac{C_n}{mL_n} - \frac{mL_n}{3C_n} \right) = 0. \end{aligned}$$

Полученное выражение приравнено 0, потому что величина m , как отмечалось выше, определяется из условия $z_{\text{общ}} = 0$.

Полагая, что величинами $\frac{m^2 L_k^3}{A_k C_k}$, $\frac{mL_1}{3A_1 C_1}$ и $\frac{mL_n}{3A_n C_n}$ в первом

приближении можно пренебречь, как достаточно малыми, Пецоли получает первое решение в виде уравнения

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{mL_k}{A_k} = \frac{C_1^2}{mA_1L_1} + \frac{C_n^2}{mA_nL_n},$$

или

$$m^2 \sum_{k=2}^{n-1} \frac{L_k}{A_k} = \frac{C_1^2}{A_1L_1} + \frac{C_n^2}{A_nL_n},$$

откуда

$$m = \sqrt{\left(\frac{C_1^2}{A_1L_1} + \frac{C_n^2}{A_nL_n}\right) : \sum_{k=2}^{n-1} \frac{L_k}{A_k}}. \quad (3,96)$$

Зная же частоту колебаний, можно в первом приближении определить и $T_1 = \frac{2\pi}{m}$.

Более точное решение он получает, не пренебрегая ни одним членом в исходном уравнении. Раскрыв скобки в этом уравнении и перегруппировав члены, содержащие m , после простейших преобразований получим

$$m^4 \sum_{k=2}^{n-1} \frac{L_k^3}{3A_kC_k} + m^2 \left(\frac{L_1}{3A_1} + \frac{L_n}{3A_n} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{L_k}{3A_k} \right) - \left(\frac{C_1^2}{A_1L_1} + \frac{C_n^2}{A_nL_n} \right) = 0. \quad (3,97)$$

Введем следующие обозначения:

$$\alpha = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{L_k^3}{3A_kC_k},$$

$$\beta = \frac{L_1}{3A_1} + \frac{L_n}{3A_n} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{L_k}{3A_k}$$

$$\gamma = -\left(\frac{C_1^2}{A_1L_1} + \frac{C_n^2}{A_nL_n}\right).$$

Пользуясь этими обозначениями, уравнение (3,97) можно переписать в следующем виде:

$$\alpha m^4 + \beta m^2 + \gamma = 0.$$

Решая это биквадратное уравнение, получим

$$m = \sqrt{\frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}}. \quad (3,98)$$

Для того чтобы избежать вычисления средних глубин для каждого поперечного сечения, формулы для вычисления коэффициентов α , β и γ можно преобразовать следующим образом.

Так как $C_k = gh_k$, то

$$\alpha = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{L_k^3}{A_k C_k} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{L_k^3}{3A_k g h_k}.$$

С другой стороны, $h_k = \frac{A_k}{b_k}$, следовательно,

$$A_k h_k = \frac{A_k^2}{b_k}$$

и окончательно

$$\alpha = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{L_k^3 h_k}{3A_k^2 g}.$$

Аналогичным образом нетрудно получить

$$\gamma = -\left(\frac{g\bar{h}_1}{A_1L_1} + \frac{g\bar{h}_n}{A_nL_n}\right) = -g\left(\frac{1}{b_1L_1} + \frac{1}{b_nL_n}\right).$$

В этих формулах уже нет средней глубины (\bar{h}_k) отдельных сечений.

Если поперечные сечения находятся на равных расстояниях друг от друга, т. е. $L_k = \Delta x$ есть величина постоянная, то вышеприведенные формулы принимают еще более простой вид.

$$\alpha = \frac{\Delta x}{3g} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{b_k}{A_k^2},$$

$$\beta = \frac{\Delta x}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{A_k},$$

$$\gamma = -\frac{g}{\Delta x} \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_n}\right).$$

Эти формулы позволяют прийти к выводу, что метод импедансов является одним из самых простых из существующих методов расчетов периодов сейш.

Для бассейна не прямоугольной формы и с различными глубинами уравнения неразрывности и движения могут быть написаны в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}(AU) + b \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad (3,99)$$

и

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (3,100)$$

Эти уравнения несколько отличаются от уравнений неразрывности и движения, приведенных ранее (уравнения (2,5) и (2,6)). Но эти последние легко преобразуются в уравнения (3,99) и (3,100). В самом деле, уравнение неразрывности (2,5) имеет вид

$$\eta = -\frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial x}(A\xi),$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial x}(A\xi) = -b\eta.$$

Продифференцируем обе части этого уравнения по t , причем примем во внимание, что $\frac{\partial \xi}{\partial t} = U$, получим $\frac{\partial}{\partial x}(AU) = -b \frac{\partial \eta}{\partial t}$ или $\frac{\partial}{\partial x}(AU) + b \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$, т. е. уравнение (3,99).

Уравнение движения (2,6) $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}$. Но так как $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = \frac{\partial U}{\partial t}$, то, следовательно, его можно записать в виде $\frac{\partial U}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}$, т. е. в виде уравнения (3,100).

Примем, что скорость (U) и вертикальное смещение (η) представляют собой гармонические функции

$$U = C \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{2\pi t}{T_1}, \quad (3,101)$$

$$\eta = H \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{2\pi t}{T_1}. \quad (3,102)$$

Обозначим $C \sin \frac{\pi x}{l} = U(x)$ и $H \cos \frac{\pi x}{l} = Z(x)$ и перепишем уравнения (3,101) и (3,102) в виде

$$U = U(x) \sin \frac{2\pi t}{T_1}, \quad (3,103)$$

$$\eta = Z(x) \cos \frac{2\pi t}{T_1}. \quad (3,104)$$

Найдем $\frac{\partial \eta}{\partial t}$, $\frac{\partial U}{\partial t}$ и $\frac{\partial \eta}{\partial x}$. Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -\frac{2\pi}{T_1} Z(x) \sin \frac{2\pi t}{T_1}; \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{2\pi}{T_1} U(x) \cos \frac{2\pi t}{T_1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} [Z(x)] \cos \frac{2\pi t}{T_1}. \end{aligned}$$

Подставим в уравнение (3,100) вместо $\frac{\partial U}{\partial t}$ и $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ найденные выражения, получим

$$\frac{2\pi}{T_1} U(x) \cos \frac{2\pi t}{T_1} = -g \frac{\partial}{\partial x} [Z(x)] \cos \frac{2\pi t}{T_1}.$$

Из полученного уравнения найдем

$$U(x) = -\frac{T_1 g \frac{\partial}{\partial x} [Z(x)]}{2\pi}. \quad (3,105)$$

Подставим в уравнение (3,99) вместо U выражение (3,103), заменив при этом $U(x)$ формулой (3,105), после некоторых преобразований получим уравнение

$$\frac{d}{dx} \left\{ A \frac{d}{dx} [Z(x)] \right\} + \frac{4\pi^2}{T_1^2 g} b Z(x) = 0. \quad (3,106)$$

Дж. Праудмэн в своей книге „Динамическая океанография“ [42] ограничивается выводом этого уравнения и не дает никаких практических рекомендаций относительно определения T_1 при помощи этого уравнения.

Решение этой задачи не представляет особой трудности.¹³ Перепишем уравнение (3,106) в несколько ином виде:

$$d \left\{ A \frac{d}{dx} [Z(x)] \right\} = -\frac{4\pi^2}{T_1^2 g} b Z(x) dx.$$

Подставим в полученное уравнение вместо $Z(x) = H \cos \frac{\pi x}{l}$ и сократим затем обе части уравнения на H , что можно сделать, так как H от x не зависит:

$$d \left\{ A \frac{d}{dx} \left[\cos \frac{\pi x}{l} \right] \right\} = -\frac{4\pi^2}{T_1^2 g} b \cos \frac{\pi x}{l} dx.$$

Проинтегрируем обе части полученного уравнения и в результате запишем

$$A \frac{d}{dx} \left[\cos \frac{\pi x}{l} \right] = -\frac{4\pi^2}{T_1^2 g} \int b \cos \frac{\pi x}{l} dx. \quad (3,107)$$

Произведение $b \cos \frac{\pi x}{l}$ представляет собой некоторую функ-

¹³ Практические указания для расчета T_1 при помощи приведенного уравнения в настоящей монографии разработаны Л. К. Давыдовым.

цию от x , не выраженную аналитически. Поэтому интегрирование может быть выполнено только приближенно, например методом трапеций.

Пусть длина данного водоема, для которого нужно вычислить T_1 , равна l , расстояния от левого конца озера (начало координат) до каждого поперечного сечения соответственно равны $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, x_n$ (для правого конца озера $x_n=l$), ширина каждого поперечного сечения — $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}, b_n$ (на конце озера $b_n=0$) и их площади — $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ ($A_n=0$).

Обозначим $b \cos \frac{\pi x}{l} = f(x)$ и построим по фактическим данным кривую, соответствующую уравнению $y=f(x)$, а затем и интегральную ее кривую, соответствующую уравнению

$$y = \int f(x) dx = \Phi(x).$$

В соответствии со сказанным уравнение (3,107) можно переписать в виде

$$A \frac{d}{dx} \left[\cos \frac{\pi x}{l} \right] = - \frac{4\pi^2}{T_1^2 g} \Phi(x)$$

или

$$- \frac{\pi}{l} A \sin \frac{\pi x}{l} dx = - \frac{4\pi^2}{T_1^2 g} \Phi(x) dx,$$

откуда

$$A \sin \frac{\pi x}{l} dx = \frac{4\pi}{T_1^2 g} \Phi(x) dx.$$

Проинтегрируем обе части полученного уравнения в пределах от 0 до l . Численное интегрирование полученных выражений не представляет затруднений. Обозначим

$$\int_0^l A \sin \frac{\pi x}{l} dx = M_1 \text{ и } \int_0^l \Phi(x) dx = M_2,$$

где M_1 и M_2 — численные значения приведенных интегралов и представляют собой конечные величины одного знака.

Для расчета периода одноузловой сейши для рассматриваемого бассейна можно написать равенство $M_1 = \frac{4\pi}{T_1^2 g} M_2$, откуда

$$T_1 = 2 \sqrt{\frac{\pi M_2}{g M_1}}.$$

Расчеты по этому методу носят довольно простой характер и в ряде случаев дают хорошие результаты.

ОШИБКИ ПРИ РАСЧЕТАХ ПЕРИОДОВ СЕЙШ

При разработке всех методов расчета периодов сейш предполагалось, что плоскость колебаний совпадает с осью водоема. Это предположение в значительной мере является произвольным и может служить источником больших ошибок для крупных водоемов. Справедливость сказанного была убедительно показана Киткиным [23] на примере Аральского моря.

Решение задачи о сейшах сводилось к исследованию плоской волны. Полученные выводы распространялись на весь естественный водоем и, таким образом, расчет по существу производился для озера прямоугольной формы.

Такая замена естественного водоема прямоугольным едва ли может быть признана достаточно обоснованной, даже при соблюдении условия, предложенного Кристалом: оба водоема имеют одну и ту же нормальную кривую.

Схематизация этой кривой при применении метода Кристала может привести к довольно большим ошибкам и расхождению между периодами, вычисленными и определенными по лимниграммам самописцев уровня. Здесь же следует сделать оговорку относительно необходимости соблюдения осторожности при сравнении вычисленных и наблюдаемых периодов. Нередко записи самописцев оказываются настолько сложными, что по ним довольно трудно определить периоды сейш. Кроме того, на лентах неудачно установленного самописца иногда отчетливо выделяются местные сейши, возникающие в бухтах и заливах, и почти незаметны сейши всего водоема.

Теория сейш разрабатывалась обычно без учета силы Кориолиса и трения. Влияние отклоняющей силы вращения Земли сказывается существенно на волнах, периоды которых близки к половине маятниковых суток. В условиях Советского Союза влияние силы Кориолиса необходимо, таким образом, учитывать лишь для двух озер — Аральского моря и Балхаша. Для остальных озер им можно пренебречь.

Влияние трения на сейши обычно выражается в затухании волн. Последнее может быть охарактеризовано уравнением

$$H_{t_i} = H_{t_0} e^{-\delta \frac{(t_i - t_0)}{T}} \cos \frac{2\pi(t_i - t_0)}{T},$$

где H_{t_i} — амплитуда уровня в момент t_i ; H_{t_0} — то же, но в начальный момент времени t_0 ; δ — логарифмический декремент затухания; t_i — время; T — период сейши. При помощи приведенного уравнения может быть построен график колебаний уровня. Если выбрать моменты времени так, чтобы $t_i - t_0 = kT$, то $\cos \frac{2\pi(t_i - t_0)}{T} = 1$. Из приведенного уравнения нетрудно определить декремент затухания δ , связанный с так называемой константой трения γ зависимостью $\delta = \gamma T$.

При изучении сейш на моделях для перехода от периода модели ($T_{\text{мод}}$) к периоду озера ($T_{\text{ест}}$) применялась формула

$$T_{\text{ест}} = T_{\text{мод}} \frac{m}{\sqrt{n}} \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{6} \left[\frac{2\pi h}{\lambda} \right]^2} \right] \frac{2\pi}{2\pi + \delta}.$$

Заменим в этой формуле $\lambda = 2L$ и $\pi = 3,1416$. После простейших преобразований получим

$$T_{\text{ест}} = T_{\text{мод}} \frac{m}{\sqrt{n}} \left[\frac{1}{1 + 1,645 \left(\frac{h}{L} \right)^2} \right] \frac{1}{1 + 0,159 \delta}. \quad (3,108)$$

Представим себе, что мы изготовили модель озера в его естественных размерах. Тогда $\frac{m}{\sqrt{n}} = 1$ и, следовательно, формулу (3,108) можно переписать в виде

$$T_{\text{ест}} = T_{\text{мод}} \frac{1}{1 + 1,645 \left(\frac{h}{L} \right)^2} \cdot \frac{1}{1 + 0,159 \delta}. \quad (3,109)$$

Величина $1,645 \left(\frac{h}{L} \right)^2$ настолько мала, что ею можно пренебречь. Действительно, в результате вычислений оказалось, что из 60 озер, расположенных в различных районах земного шара, только для оз. Хеконе (Япония) эта величина равна $3,9 \times 10^{-5}$. Для всех остальных озер она значительно меньше.

Допустим, что существует озеро, длина которого в 2 раза меньше, а глубина втрое больше, чем оз. Хеконе, т. е. $L = 2,2 \text{ км}$, $h = 96 \text{ м}$. Предположение это весьма мало вероятно. В природе таких озер не существует. Для такого озера $1,645 \left(\frac{h}{L} \right)^2 = 324 \times 10^{-5} = 0,00324$, а дробь

$$\frac{1}{1 + 1,645 \left(\frac{h}{L} \right)^2} = 0,9967.$$

Таким образом, ошибка при отбрасывании $1,645 \left(\frac{h}{L} \right)^2$ меньше 0,4%, а, следовательно, формуле (3,109) можно придать вид

$$T_{\text{ест}} = T_{\text{мод}} \frac{1}{1 + 0,159 \delta}. \quad (3,110)$$

Казалось бы, что если модель озера построена в натуральную величину, то период сейши в естественном водоеме и на модели должен быть один и тот же, т. е. поправочный коэффициент должен быть равен 1. В действительности же он, как это следует из формулы (3,110), меньше 1. Произошло это потому, что исходная формула для перехода от периода, определенного на модели, к периоду естественного водоема

была выведена в предположении о существовании разницы между декрементами затухания на модели и в естественных условиях и что для учета этих различий необходимо ввести в исходную формулу поправку за счет трения. Отсюда следует, что в формуле (3,110) период $T_{\text{мод}}$ можно рассматривать как период сейши, вычисленный без учета трения, и тогда формулу (3,110) можно записать в виде

$$T_{\text{ист}} = T_{\text{выч}} \frac{1}{1 + 0,159 \delta}.$$

Декремент затухания чаще всего не превышает 0,4. При таком его значении $T_{\text{ист}} = T_{\text{выч}} \times 0,958$, а, следовательно, ошибка от неучета трения не превышает 5% от истинного периода сейши.

Заканчивая обзор существующих методов расчета элементов сейш, следует заметить, что применение современных счетных машин и метода ЭГДА (электро-гидродинамической аналогии) позволит производить расчеты с большей точностью и с гораздо меньшей затратой времени и сил. Решение этой задачи — дело ближайшего будущего.

ГЛАВА I

СЕЙШИ оз. БЕЛОГО

Белое озеро принадлежит к бассейну Верхней Волги. Оно отличается от других озер, рассматриваемых в данной работе, исключительной мелководностью при сравнительно большой площади водного зеркала, очертанием береговой линии, близким к овалному, и пологими берегами. Это своеобразие озера и ветровой режим над ним создают особые условия в динамике водных масс водоема, а следовательно, и в образовании и развитии сейш и сейшеобразных колебаний.

Форма озера, как уже отмечалось, близка к овальной. Длина его 43,6 км, ширина 32,8 км.¹ Береговая линия развита слабо. Площадь водной поверхности озера равна 1125 км². Она не остается постоянной при повышении уровня во время весенних разливов и достигает 1370 км². Годовая амплитуда уровня составляет 1—1,2 м. Дно озера плоское. Глубины на большей части его площади не превышают 4,25 м. Имеются сведения о нескольких ямах с глубинами до 16 м, представляющих собой воронки, заполненные илом. Нарастание глубин от уреза воды к центральной части водоема по всей акватории происходит постепенно. Средняя глубина озера около 3 м. Белое озеро расположено среди облесенной и заболоченной равнины, слабо всхолмленной и окруженной по периферии его бассейна мореными грядами.

Берега очень пологие, как правило, низкие, местами заболоченные, в особенности в северо-западной, западной и юго-западной частях озера. Более повышены северо-восточный, восточный и южный берега. Местами эти берега облесены. Озеро, таким образом, со всех сторон открыто действию ветров и в особенности в западной его части. Ближайшие метеорологиче-

¹ Морфометрические данные приводятся по материалам ВНИОРХа [33].

ские станции свидетельствуют о преобладании ветров южных и западных румбов. Эти ветры беспрепятственно достигают акватории озера, вызывают в нем волнение, сгоны и нагоны, течения довольно часто и являются причиной возникновения в озере сейш и сейшеобразных колебаний. Ветровое волнение на озере наблюдается постоянно, а сгоны и нагоны и сейшеобразные колебания — достаточно частые явления.

Детальное изучение колебаний уровня воды озера при помощи самописцев производилось Ленинградским отделением Гидропроекта с 1952 по 1960 г. Самописцы уровня типа «Валдай» были удачно размещены вблизи концов большой и малой

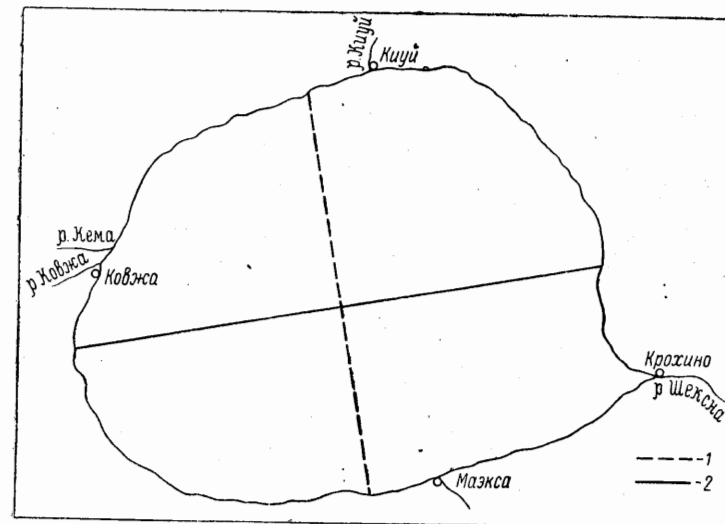


Рис. 12. Схема Белого озера.

1 — узловая линия продольной одноузловой волны; 2 — наибольшая ось.

оси озера: на западном берегу в устье р. Ковжи у с. Ковжа, на юго-восточном — у с. Крохино (в истоке р. Шексны), в 800 м выше плотины, на северном берегу — в устье р. Киуй, на южном — у с. Мазкса (рис. 12). Нули графиков всех четырех водомерных постов приведены к абсолютным отметкам. Для анализа внутрисуточных колебаний уровня и изучения сейш в озере Ленинградским отделением Гидропроекта ленты самописцев уровня были предоставлены в наше распоряжение.

В настоящем исследовании были использованы записи самописцев уровня оз. Белого за 1953 и 1957—1960 гг. Продолжительность времени, в течение которого самописцы работали в указанных пунктах, не одинакова (табл. 6).

Анализ лент самописцев позволяет установить, что в озере очень часто наблюдаются нагоны и сгоны, при которых перекося водной поверхности может быть довольно значительным. В отдельных случаях разность отметок уровня воды у противоположных берегов достигает 0,7 м и более.

Таблица 6

Продолжительность работы самописцев уровня на оз. Белом за 1953, 1957—1960 гг.

Пункты наблюдений	Продолжительность наблюдений				
	1953 г.	1957 г.	1958 г.	1959 г.	1960 г.
С. Крохино . . .	VI—VIII	VII—XI	VI—X	V—X	V—IX
С. Ковжа	IV—VIII	V—XI	V—XI	V—X	V—X
С. Маэкса	—	—	VII—X	V—IX	—
Устье р. Киуй . .	—	—	VIII—X	VIII—X	—

Кроме нагонов и сгонов, на озере хорошо развиты сейшеобразные колебания и сейши. Ни одна лимниграмма четырех самописцев в течение многих месяцев, когда озеро было свободно ото льда, не показала спокойного хода уровня в течение суток. Они всегда отражают периодические колебания уровня, порой очень сложного вида и со значительной амплитудой колебаний (до 30 см).

Сложные записи на лимниграммах, по всей вероятности, представляют собой результат интерференции сейш различных направлений (продольных, поперечных и других) и периодов (одноузловых, двухузловых и т. п.). Предположение о формировании в озере сейш различных направлений вполне согласуется с овальной формой озера, открытого со всех сторон действию ветров.

Анализ лимниграмм позволил отметить существование сейш нескольких периодов — около 1, 2, 3 и 4 ч. Можно полагать, что колебания уровня с периодами, близкими к 4, 2 и 1 ч, соответствуют сейшам продольным с 1, 2 и 3 узлами; колебания с периодом около 3 ч соответствуют одноузловой поперечной сейше.

Для определения периодов сейш была произведена статистическая обработка лимниграмм (см. гл. I). Результаты этой обработки приведены в табл. 7, причем величины периодов продольных и поперечных сейш в этой таблице осреднены. По каждому пункту наблюдений были отобраны ленты самописцев, на которых зафиксированы серии колебаний с периодами, близкими к 4, 3, 2 и 1 ч. Это значит, что периоды колебаний на лентах не всегда строго соответствуют периодам сейш намечен-

ных направлений — продольного или поперечного — и могут несколько отклоняться от них. Тем не менее массовая обработка большого числа лимниграмм по четырем пунктам наблюдений, включающих в себя не одну сотню волн периодических колебаний, позволяет утверждать, что полученные осредненные значения периодов отражают периоды сейш и сейшеобразных колебаний основных выбранных направлений.

Таблица 7

Средние значения периодов сейш с различным числом узлов по записям самописцев в 4 пунктах наблюдений; N — число волн T — период сейш

С. Крохино		С. Ковжа		Устье р. Киуй		С. Маэкса		Среднее значение	
N	T , ч мин	N	T , ч мин	N	T , ч мин	N	T , ч мин	N	T , ч мин
243	3 47	1198	3 43	—	—	—	—	1441	3 44
2018	3 11	2559	3 20	236	3 07	16	3 18	4 29	3 16
2283	2 12	767	2 29	1338	2 15	948	2 10	5336	2 15
1887	1 06	1124	1 10	51	1 14	—	—	3062	1 05

На самописцах у с. Крохино и с. Ковжа отмечены сейши всех периодов, но с различной их повторяемостью. Наиболее редки сейши с периодом около 4 ч у с. Крохино. Здесь на их долю приходится в среднем 3,8% всех случаев сейш, наблюдавшихся в этом пункте. В отдельные месяцы повторяемость этого рода сейш возрастает до 20% (у с. Ковжа повторяемость этих сейш 21,3%), а в отдельные месяцы значительно больше — до 70%.

На постах с. Маэкса и в устье р. Киуй сейши с периодом около 4 ч самописцами уровня не были отмечены ни разу. Можно предполагать, что осредненный период в 3 ч 44 мин представляет собой период одноузловой продольной сейши (рис. 13, а). Так как узловая линия этой сейши проходит вблизи с. Маэкса и устья р. Киуй, то в этих пунктах сейша с указанным периодом не выражена.

Сейши с периодом около 3 ч (средний период 3 ч 16 мин) наблюдаются на озере очень часто и регистрируются всеми самописцами (см. рис. 13, б), но с различной повторяемостью. Наиболее часты они у с. Крохино, с. Ковжа. У первого пункта повторяемость их 31,2%, у второго — 45,4%. В отдельные месяцы повторяемость этого рода сейш колеблется в интервале 40—80%. У устья р. Киуй сейши с периодом около 3 ч наблюдаются относительно редко, в среднем повторяемость их составляет 15% от общего числа случаев. У с. Маэкса они наблюдаются

еще реже (были зарегистрированы только в сентябре 1958 г. и продолжались очень недолго).

Эти сейши, по-видимому, также одноузловые, но направление их несколько иное, по всей вероятности, близкое к поперечному. Такое предположение подтверждается теоретическими расчетами и экспериментальными наблюдениями на модели, о чем будет сказано далее.

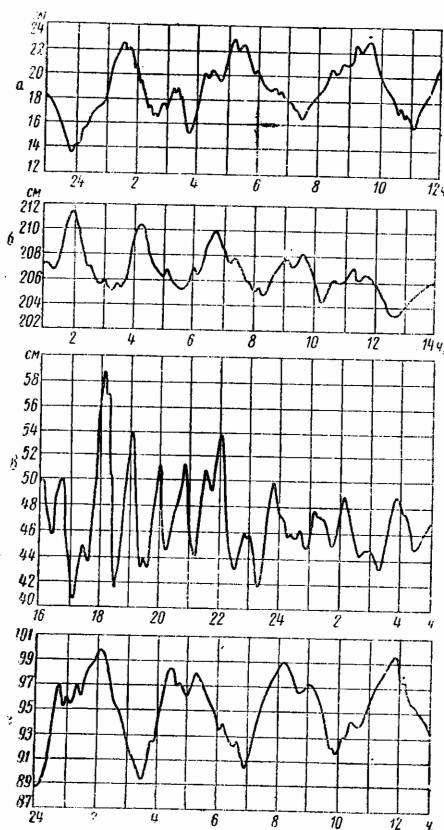


Рис. 13. Сейши Белого озера у с. Ковжа.

а — продольная одноузловая сложная сейша за 17—18 IX 1958 г.; б — продольная двухузловая сейша за 29 VIII 1959 г.; в — трехузловые сейшеобразные колебания за 6—7 IX 1959 г.; г — поперечная сейша за 10 VI 1959 г.

Для подтверждения высказанных предположений и выяснения характера наблюдавшихся сейш озера были произведены расчеты периодов сейш теоретическими способами, а также была проведена серия опытов на модели Белого озера. Расчеты производились при помощи нескольких методов (табл. 8).

Сейши с периодом около 2 ч (средний период 2 ч 15 мин) регистрировались на всех пунктах наблюдений, но особенно характерны для водомерных постов у с. Маэкса и в устье р. Киуй (см. рис. 13, б). Здесь почти все сейши имеют этот период и только в устье р. Киуй в отдельные месяцы их повторяемость снижается до 70%. Таким образом, и здесь они остаются преобладающими. На водомерных постах у с. Крохино и с. Ковжа двухчасовые сейши также довольно часты, но повторяемость их все-таки меньше (14—35%).

Сейши с периодом около 1 ч совершенно отсутствуют у с. Маэкса. Для поста в устье р. Киуй эти сейши не характерны — они составляют всего 3,1%. У с. Крохино и с. Ковжа эти сейши наблюдаются относительно часто (см. рис. 13, в). Их повторяемость 20—30%. Можно полагать, что колебания с двух- и одночасовыми периодами представляют собой двух- и трехузловые продольные сейши озера.

При вычислении продольных сейш за длину озера принята длина наибольшей оси озера, равная 42,3 км (см. рис. 12). При вычислении периодов поперечных сейш была принята длина малой оси, равная 32,2 км. Средняя глубина принята равной 3,0 м. Наилучшую сходимость рассчитанных периодов сейш продольной одноузловой и двухузловой с наблюдаемыми дал метод Кристалла, что вполне понятно, так как озеро представляет собой водоем с плавно изменяющимися глубиной и шириной. Довольно хорошие результаты дали расчеты периодов по формуле Мериана для всех сейш, кроме продольной одноузловой, и по методу Дефанта для поперечной одноузловой. Расчеты по методу Давыдова оказались удовлетворительными.

Таблица 8

Периоды сейш Белого озера, рассчитанные теоретически

Виды сейш	Методы расчета					По фактическим данным, ч мин
	Мериан, ч мин	Кристалл, ч мин	Пруд-мэн, ч мин	Давыдов, ч мин	Дефант, ч мин	
Продольная одноузловая	4 22	3 43	3 19	4 04	3 30	3 44
" двухузловая	2 11	2 14	—	2 02	—	2 15
" трехузловая	1 06	—	—	1 01	—	1 08
Поперечная одноузловая	3 19	—	—	3 10	2 42	3 16
" двухузловая	1 40	—	—	1 35	—	—

Некоторые отклонения вычисленных периодов сейш от наблюдаемых, или точнее от вычисленных статистически, вполне закономерны в связи с тем, что в Белом озере, как уже отмечалось, значительно чаще, чем в других озерах, периодические колебания уровня могут происходить по направлениям, отличающимся от направлений, соответствующих большой и малой осям озера. Кроме того, изменение морфометрических характеристик озера при колебаниях уровня воды в нем может несколько, хотя и незначительно, отразиться на результатах расчета.

Сейши озера изучались на модели, сооруженной лаборантом кафедры гидрологии суши географического факультета Ленинградского государственного университета А. Е. Золотаревым. Опыты с этой моделью производили Н. М. Арсеньева и А. Е. Золотарев.

Модель была изготовлена из цемента в масштабе искажения: вертикальном 1 : 100 и горизонтальном 1 : 50 000. Для ослабления трения дно и стенки модели были покрыты тонким слоем пластилина.

Сейши возбуждались либо покачиванием модели, либо ритмическим погружением деревянной пластинки в воду, либо при помощи вертикально подвешенного маятника. Опыты позволили установить периоды продольной одноузловой и двухузловой и поперечной одноузловой сейш, а также определить положение узловой линии продольной одноузловой сейши (см. рис. 12). Колебания уровня фиксировались на лентах самописцев, установленных в различных точках озера. Расчет периода сейш производился по формуле В. Н. Соловьева [47], имеющей вид

$$T'' = T' \frac{m}{\sqrt{n}} \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{6} \left(\frac{2\pi h}{\lambda} \right)^2} \right] \frac{2\pi}{2\pi + \delta}.$$

В этой формуле T' — период сейши в сек, зарегистрированный на самописцах модели; T'' — тот же период в естественных условиях; $1:m$ и $1:n$ — горизонтальный и вертикальный масштабы модели; λ — длина волны; h — средняя глубина модели; δ — логарифмический декремент затухания. Результаты опытов приведены в табл. 9, где T' — период на модели; T'' — период по формуле Соловьева; T — период, наблюдаемый на озере.

Таблица 9

Периоды сейш, определенные по модели

Виды сейш	T' , сек	T'' , ч мин	T , ч мин	δ
Продольная одноузловая	2,66	3 40	3 44	0,073
„ „ двухузловая	2,73*	3 42	3 44	0,077
Поперечная одноузловая	1,51	2 05	2 15	0,077
„ „ двухузловая	2,04	2 59	3 16	0,071
	1,27	1 44	—	—

* Сейша возбуждалась маятником, во всех же остальных случаях — ритмическим погружением пластинки.

Таким образом, можно констатировать достаточно хорошую сходимость периодов сейш, определенных по данным фактических наблюдений и полученных по модели.

В результате сравнения периодов всех видов сейш на оз. Белом, определенных различными способами, можно принять: период продольной одноузловой сейши $T_{1 \text{ прод}} = 3 \text{ ч } 44 \text{ мин}$, продольной двухузловой — $T_{2 \text{ прод}} = 2 \text{ ч } 15 \text{ мин}$, продольной трехузловой $T_{3 \text{ прод}} = 1 \text{ ч } 08 \text{ мин}$ и поперечной одноузловой $T_{1 \text{ попер}} = 3 \text{ ч } 16 \text{ мин}$.

Как отмечалось уже выше, на лентах самописцев уровня можно видеть кривые довольно сложных очертаний, являющихся, по-видимому, следствием интерференции сейш разных периодов и различных направлений. С целью выявления элемен-

тарных кривых периодических колебаний была произведена выборочная обработка некоторых лимниграмм по методу Бюи-Балло, с последующим разложением записи на лентах на составляющие кривые элементарных сейш (табл. 10). Полученные периоды оказались довольно близкими к тем, которые были получены ранее. Однако полной уверенности в том, что полученные периоды сейш совпадают с периодами сейш основных направлений, нет. Так, сложная кривая лимниграммы самописца у с. Ковжа за 14—15 сентября 1958 г. при разложении ее на составные части оказалась состоящей из трех кривых элементарных сейш: одной с периодом 3 ч 25 мин, другой — 1 ч 50 мин, третьей — 0 ч 55 мин. По-видимому, это одно-, двух- и трехузловые поперечные сейши, но идущие в направлении, несколько не совпадающем с поперечной осью.

Таблица 10

Периоды сейш оз. Белого, полученные в результате обработки лимниграмм по методу Бюи-Балло

Дата	С. Крохино	С. Ковжа	Устье р. Киуй	С. Маэкса
	ч мин	ч мин	ч мин	ч мин
1958 г.				
3—4 VIII		3 25		
28—29 VIII	2 25		2 30	
28—30 VIII		3 25	1 50	
14—15 IX	2 30	1 50	2 30	
		0 55		
23—24 IX		3 30		3 05
				1 10
1959 г.				
23—24 VIII		3 25		

Амплитуды сейш в чистом виде, по-видимому, невелики, амплитуды же сейшеобразных колебаний достигают значительных размеров. При интерференции сейш определить истинную амплитуду каждой составляющей сейши трудно и можно говорить лишь об их общей амплитуде.

В табл. 11 приведены сведения об амплитудах максимальных и 50% обеспеченности для сейш четырех различных периодов за 1953, 1957—1960 гг.

На всех пунктах наблюдений отмечаются значительно изменяющиеся амплитуды, достигающие в отдельных случаях 29 см. Величина эта составляет около $\frac{1}{4}$ годовой амплитуды уровня воды озера, которая, как известно, равна 1,2 м. Средние амплитуды по отдельным месяцам изменяются мало.

При продольной одноузловой сейше с. Крохино и с. Ковжа оказываются расположенными вблизи концов продольной оси, там, где наблюдаются пучности. Иначе говоря, в момент, когда у с. Крохино наблюдаются наивысшие уровни, у с. Ковжа отмечаются минимальные уровни и наоборот. В этих же пунктах и амплитуды колебаний будут наибольшими.

Таблица 11

Амплитуды сейш и сейшеобразных колебаний оз. Белого за 1953 и 1957—1960 гг.

Периоды	Амплитуды, см							
	50 % обеспеченности				максимальные			
ч мин	с. Крохино	с. Ковжа	Устье р. Киуй	с. Мазкса	с. Крохино	с. Ковжа	Устье р. Киуй	с. Мазкса
3 44	7,2	2,6			28,6	12,2		
3 16	3,5	2,8			28,8	17,6	9,4	4,2
2 15	3,2	2,7	3,2	3,4	25,0	14,8	12,5	
1 08	2,2	1,8	2,5	2,9	15,9	9,2	3,8	17,1

При одноузловой продольной сейше в пунктах наблюдений у с. Мазкса и у устья р. Киуй колебания уровня будут носить сходный характер с колебаниями уровня у с. Крохино, но амплитуды здесь значительно меньше вследствие близкого их расположения к узловой линии этой сейши.

При поперечных одноузловых сейшах пункты наблюдений у с. Мазкса и в устье р. Киуй оказываются вблизи областей пучностей и в это время здесь самописцы регистрируют наивысшие и наинизшие уровни, а, следовательно, амплитуда сейши достигает максимума. Самописец же в с. Ковжа при поперечной сейше оказывается вблизи ее узловой линии и амплитуды уровня становятся здесь меньшими. Лимниграммы у с. Крохино и у с. Мазкса приобретают сходные черты.

В чистом виде продольные и поперечные сейши на Белом озере наблюдаются сравнительно редко. Чаще они приближаются к этим направлениям. Иногда на них накладываются другие виды сейш. Мелкие частые колебания уровня на фоне основной сейши иногда сильно искажают ее. Эти колебания самописцем типа «Валдай» не улавливаются в таком виде, чтобы их можно было проанализировать. Вот почему приведенные средние величины периодов наблюдаемых продольных сейш (3 ч 44 мин, 2 ч 15 мин, 1 ч 08 мин) следует считать несколько преуменьшенными, а поперечных (3 ч 16 мин) — скорее преувеличенными.

Причины возникновения сейш на Белом озере не изучены. Некоторые выводы позволяет сделать анализ лимниграмм с одновременным рассмотрением режима ветров и атмосферного давления. Так, например, 14—15 сентября 1958 г. у с. Крохино и с. Ковжа (рис. 14) наблюдались сложные колебания

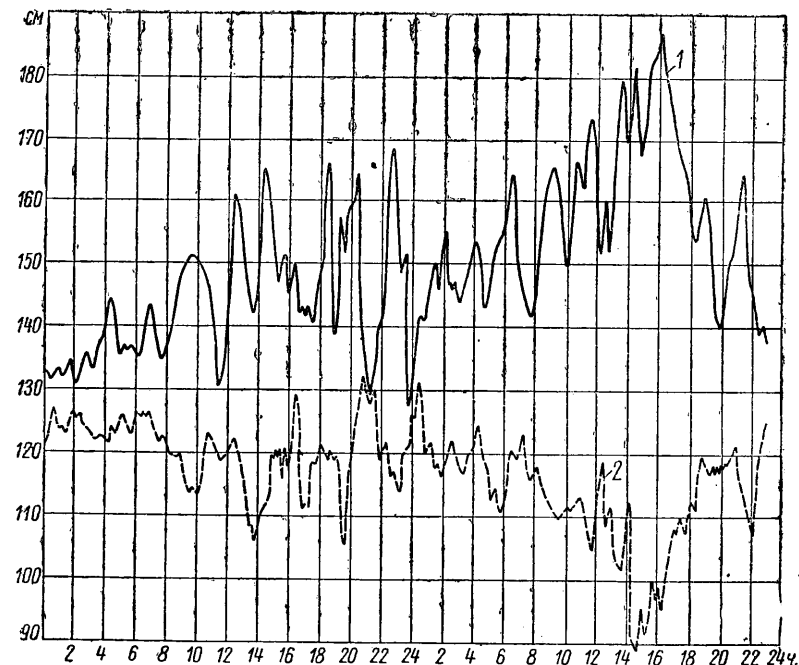


Рис. 14. Сложные сейшеобразные колебания оз. Белого за 14—15 IX 1958 г.

1 — у с. Крохино; 2 — у с. Ковжа.

уровня, являющиеся результатом интерференции сейшеобразных колебаний разных периодов, близких к двух- и трехчасовой продолжительности. Амплитуды колебаний значительны — до 20 см у с. Крохино и 15 см у с. Ковжа. Таким образом, размах колебаний составляет 30—40 см. Фазы колебаний на противоположных концах озера, как и следовало ожидать, не совпадают. Сейшеобразные колебания в данном случае развиваются на фоне наклонной водной поверхности озера. Перекос водной поверхности отчетливо виден при совмещении лимниграмм. Разность уровней у противоположных концов озера, составлявшая в 0 ч 14 сентября всего 10 см, постепенно возрастала и к 14—15 ч следующего дня (15 сентября) достигла наибольших значений — 90—95 см.

Причиной сейшеобразных колебаний в данном случае яви-

лось резкое падение атмосферного давления, зарегистрированное у с. Ковжа (табл. 12), и связанное с ним появление шквальных ветров ЗСЗ и СЗ направлений со скоростями до 21,5 м/сек.

Ветры эти вызвали нагон у восточно-юго-восточного побережья у с. Крохино и сгон у противоположного берега у с. Ковжа. Следует отметить, что сейшеобразные колебания 14—15 сентября наблюдались и у с. Маэкса, и в устье р. Киуй. Однако

амплитуда колебаний в этих пунктах была значительно меньше. С полудня 15 сентября направление ветра меняется с СЗ на ССВ и С, что способствует возникновению поперечных сейш, вызвавших обратный ход уровней у с. Маэкса и у устья р. Киуй, с амплитудами 11—17 см.

Сложные периодические колебания отчетливо видны на лимниграмме за 9 августа 1958 г. (рис. 15). На этом рисунке изображены колеба-

ния уровня по трем самописцам на озере при сейше, возникшей на фоне небольшого сгона-нагона под воздействием сильных порывов ветра (10—11 м/сек) западных направлений. Графики колебаний уровня при этой сейше отличаются сложными очертаниями и большими амплитудами, в особенности 9 августа. Направление сейши было близко к продольному. Ослабление ветра привело к постепенному затуханию сейши и сближению отметок уровня воды у наветренного и подветренного берега. На рисунке хорошо виден согласованный ход уровня у с. Крохино и с. Маэкса и обратный у с. Ковжа.

Интересен случай образования сейшеобразных колебаний в результате шквального ветра со скоростью до 25 м/сек юго-западного направления в 0 ч 40 мин 4 августа 1958 г. Возникли периодические колебания продольного направления. Самописцы в с. Ковжа и в с. Крохино зарегистрировали сейшу с амплитудой 16—17 см в первом и со значительно большей во втором пункте наблюдений. Вследствие резкого подъема уровня у с. Крохино тросик у самописца оборвался, поэтому нет возможности дать величину истинной амплитуды.

Порывы ветра того или иного направления, но с меньшими скоростями также нарушают равновесие водной массы в озере и вызывают образование сейш. Так, 30 июня 1958 г. после полудня порыв восточных ветров со скоростью до 6 м/сек вызвал сейшеобразные колебания. Последующее ослабление ветра привело к постепенному их затуханию (рис. 16, а). Другой пример 15—16 ноября 1958 г. еще более нагляден. На рис. 16, б отчетливо выражена одноузловая сейша. Она возникла на фоне затухающих сейш, наблюдавшихся на озере в предшествующие

Таблица 12
Атмосферное давление (мм)
13—15 сентября 1958 г.
в с. Ковжа

Дата	Сроки наблюдений, ч		
	8	1	20
13 IX	747,1	749,2	749,0
14 IX	740,4	740,6	741,8
15 IX	742,4	744,1	746,5

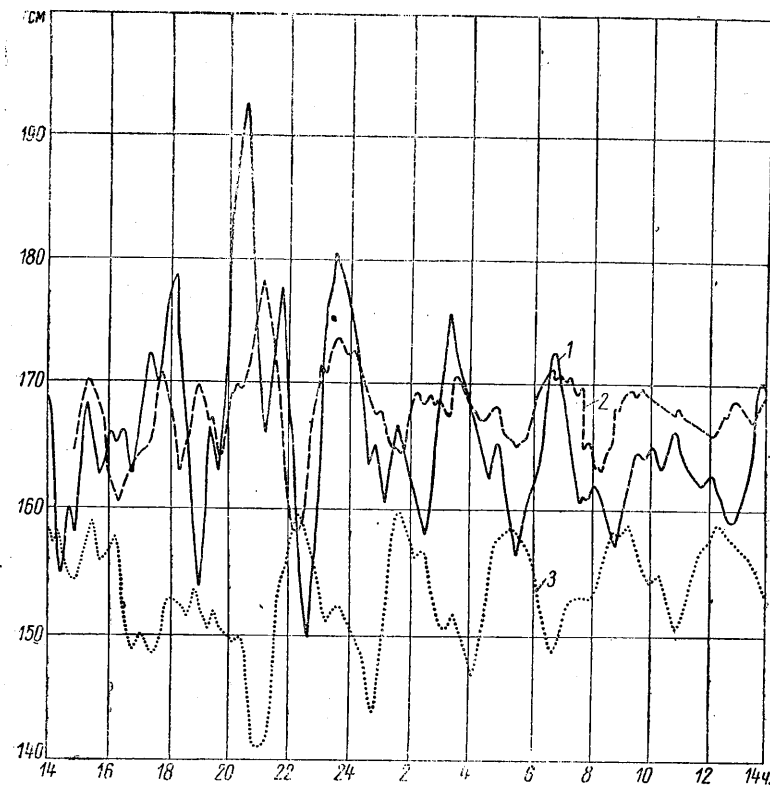


Рис. 15. Сейшеобразные колебания оз. Белого за 9—10 VIII 1958 г.

1 — у с. Крохино; 2 — у с. Маэкса; 3 — у с. Ковжа.

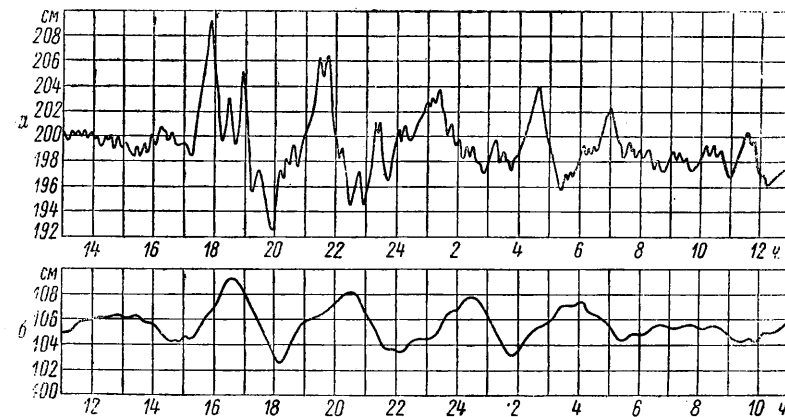


Рис. 16. Затухающие сейшеобразные колебания.

а — за 30 VI—1 VII 1958 г.; б — сейши за 15—16 XI 1958 г., вызванные шквалистым ветром оз. Белого у с. Ковжа.

сутки. Вызвана она сильными порывами ветра западных направлений в послеполуденные часы со скоростью около 7 м/сек. Следует заметить, что ветры со скоростями меньше 3 м/сек не вызывают сколько-нибудь заметных периодических колебаний уровня оз. Белого.

Таким образом, относительно характера и формирования периодических колебаний на оз. Белом можно прийти к следующим выводам:

1) на озере преобладают сейшеобразные колебания; сейши в чистом виде наблюдаются сравнительно редко;

2) сейшеобразные колебания обычно связаны со сгонно-нагонными явлениями и частым изменением характера ветра (направление, скорость);

3) шквалистые ветры, возникающие при резком изменении атмосферного давления, вызывают почти всегда серии сейшеобразных колебаний, переходящих иногда при прекращении ветра в сейши, с характерным для них затуханием колебаний;

4) явления эти почти постоянно наблюдаются в озере в связи с тем, что штилевая погода не характерна для Белого озера.

ГЛАВА II

СЕЙШИ ЛАДОЖСКОГО ОЗЕРА

Ладожское озеро (рис. 17) — самое крупное озеро в Европе. Площадь его водной поверхности 17 836 км². Длина озера по данным измерений для настоящей работы принята равной 197 км.² Средняя глубина озера 51 м.

В северной части берега довольно высокие, скалистые и отличаются сложными очертаниями. Они изрезаны многочисленными заливами, мысами, далеко вдающимися в озеро. Вдоль берега разбросаны многочисленные острова. Южные же берега низкие, заболоченные и характеризуются плавными очертаниями. Они почти не расчленены.

Дно озера в северной части неровное, с глубокими ложбинами и грядами между ними. Здесь сосредоточены наибольшие глубины (до 230 м). Южная часть озера отличается плоским дном с глубинами, не превышающими 50 м.

Впервые (в 1875 г.) на периодические (сейшеобразные) колебания уровня воды озера обратил внимание А. П. Андреев [1], но, как правильно отметил в свое время Л. С. Берг [3], объяснение этого явления, данное А. П. Андреевым, было совершенно неудовлетворительным.

Большие размеры озера, характерный для него режим вет-

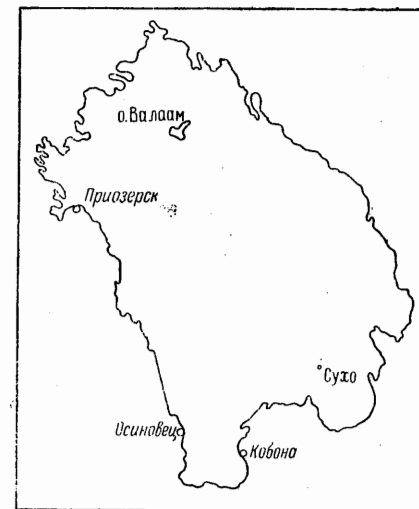


Рис. 17. Схема Ладожского озера.

² Илмо Хела в статье, опубликованной в 1945 г. [69], принимает длину продольной оси озера равной 187 км.

ров, резкие изменения атмосферного давления создают благоприятные условия для возникновения сейш и сейшеобразных колебаний, причем, как можно предполагать по данным записей лимниграфов, эти последние преобладают.

Преобладающие направления ветров на Ладожском озере южных румбов (ЮЗ, Ю и ЮВ) в значительной мере совпадают с направлением продольной оси водоема. Это обеспечивает возможность возникновения продольной одноузловой сейши.

По имеющимся данным, разность атмосферного давления Сартавала—Новая Ладога, т. е. с северо-запада на юго-восток, превышает 5—6 мб, что и является причиной довольно сильных ветров вдоль продольной оси озера. Циклоны часто перемещаются поперек озера. Вследствие этого создаются значительные разности давления на западном и восточном берегах и возникают штормовые ветры. Такая ситуация иногда продолжается несколько дней, причем разность давления на обоих берегах нередко превышает 10 мб. Разность давления в 10 мб может быть причиной возникновения сейши с амплитудой в 7,5 см.

Ветровой режим на Ладожском озере отличается быстрыми изменениями направления ветров; иногда ветер в течение 30—40 мин меняет свое направление на 135—150°.

Сейши Ладожского озера почти не изучены. В гидрологической литературе до самого недавнего времени можно было встретить лишь краткие упоминания об этом явлении.

В 1948 г. финский исследователь Илмо Хела опубликовал небольшую статью, посвященную сейшам Ладожского озера [69]. Это, по существу, первое исследование по данному вопросу. В статье дается характеристика продольной сейши по данным расчета по формуле Мериана и по записям лимниграфа в Сортанлахти (на западном берегу озера) и высказывается предположение, что наблюдающаяся сейша с коротким периодом в 15 мин представляет собой двухузловую сейшу, возникающую в заливах Коневитсан и Сортанлахти.

Ладожская экспедиция Лаборатории озероведения АН СССР организовала исследования сейш в Якимварском заливе озера. Результатом работ экспедиции в отношении сейш явились небольшие статьи Т. И. Малининой [28, 29, 30] и А. И. Тихомирова [52]. Этой же экспедицией в июле 1962 г. был установлен самописец уровня в с. Кобона.

В ведении Северо-Западного управления гидрометеорологической службы имеются четыре лимниграфа: у маяка Сухо, на о-ве Валаам, у Бумкомбината и в Осиновце.

Для того чтобы получить в первом приближении представление о периоде продольной одноузловой сейши, был вычислен этот период по формуле Мериана, оказавшийся равным 4 ч 54 мин. Даже беглое рассмотрение лимниграмм самописцев водомерных постов у маяка Сухо и на о-ве Валаам позволяют прийти к выводу, что кривые, записанные этими самописцами,

носят довольно сложный характер, причем, как правило, колебания уровня в этих пунктах находятся обычно в противоположных фазах. Хорошей иллюстрацией справедливости сказанного может служить рис. 18, на котором изображены колебания уровня воды за время с 8 ч 22 июня до 8 ч 23 июня 1959 г. по записям самописцев у маяка Сухо и на о-ве Валаам. Проанали-

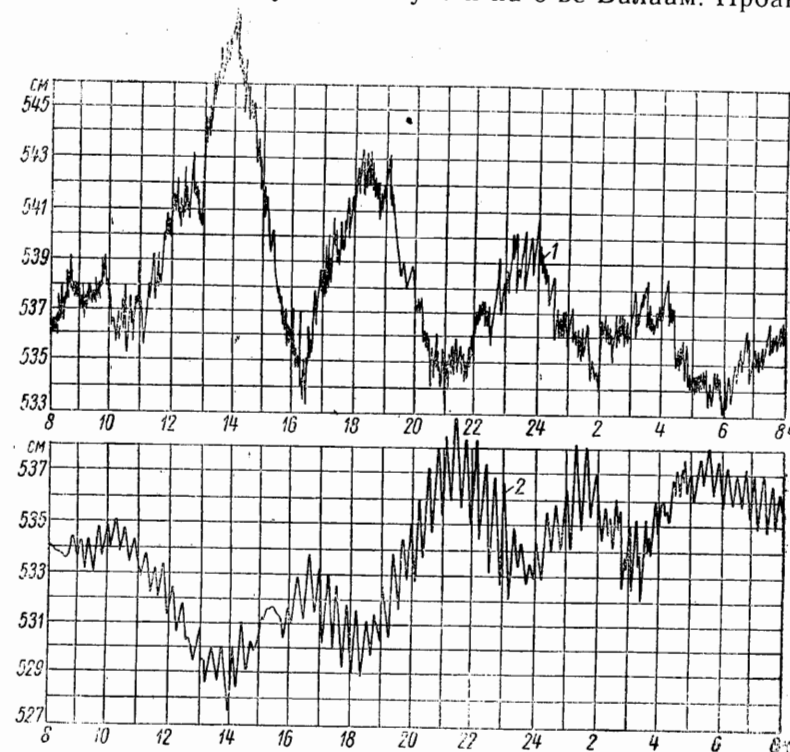


Рис. 18. Сейши Ладожского озера по записям самописцев уровня за 22—23 VI 1959 г.

1 — у о-ва Валаам; 2 — у маяка Сухо.

зируем эти графики. По данным наблюдений, у маяка Сухо 21 июня весь день до 19 ч включительно наблюдался ветер западно-северо-западного направления со скоростями, не превышающими 8 м/сек. В 1 ч ночи 22 июня ветер переменял направление на ССЗ и сохранил это направление до 13 ч того же дня, причем в этот час скорость ветра достигла максимальной величины — 18 м/сек. В 19 ч этого же дня ветер несколько изменил свое направление на ССВ и сохранил его весь день 23 июня, причем скорости ветра стали заметно уменьшаться.

Под воздействием указанных ветров у маяка Сухо в 14 ч 22 июня возник нагон, а у о-ва Валаам — сгон, причем образовавшийся перекоп водной поверхности оказался равным 22,5 см.

В результате этого возникли сначала сейшеобразные колебания, постепенно превратившиеся в сейши с характерным для них затуханием колебаний. Противоположность фаз колебаний уровня воды в обоих пунктах наблюдений на приведенном рисунке видна достаточно отчетливо.

На рис. 18 хорошо выражены периодические колебания с периодом около 4 ч 40 мин, представляющие собой, по-видимому, продольные одноузловые сейши. На фоне этих колебаний видна сейша с периодом около 18—19 мин.

Статистическая обработка лент самописцев на всех четырех пунктах наблюдений (маяк Сухо, о-в Валаам, Бумкомбинат и Осиновец) позволила установить, что по данным всех этих водомерных постов преобладают сейшеобразные колебания с периодом в 4 ч 30 мин. Обработка записи самописца у маяка Сухо по методу Бюи-Балло определила продолжительность продольной одноузловой сейши в 4 ч 31 мин (1959 г.). Эти сейши наблюдаются довольно часто. Реже встречается сейша с периодом в 2 ч 36 мин, а еще реже — с периодом в 1 ч 43 мин. Почти постоянно на всех лимниграммах заметна сейша с коротким периодом в 15—18 мин, а иногда и в 29—30 мин.

По данным финского исследователя Илмо Хела, на лентах самописца, установленного в Сортанлахти, можно отчетливо увидеть сейшу с периодом в 4 ч 36 мин и одновременно с ней сейшу с малым периодом в 15 мин (рис. 19). Как уже указывалось выше, эта сейша двухузловая, образующаяся в заливах Коневитсан и Сортанлахти. Илмо Хела рассчитал по формуле Мериана период двухузловой сейши для этих заливов (15 мин).

Для того чтобы решить вопрос о величине периодов одноузловой и двухузловой продольной сейш, были произведены расчеты этих периодов различными способами. Прежде всего был вычислен период T_1 , а затем и T_2 по формуле Мериана. В результате вычислений оказалось, что $T_1 = 4$ ч 54 мин и $T_2 = 2$ ч 27 мин.

Затем эти же периоды были вычислены по методу Кристала. На рис. 20 показана нормальная кривая Ладожского озера, схематизированная затем в виде двух пересекающихся прямых наклонных линий. Для этого случая, как было показано ранее (см. стр. 54), период сейши может быть найден в результате решения уравнения

$$I_0(\alpha_1 m) I_1(\alpha_2 m) + I_0(\alpha_2 m) I_1(\alpha_1 m) = 0,$$

где m — угловая частота колебаний, связанная с периодом сейши равенством $T_1 = \frac{2\pi}{m}$. Параметры α_1 и α_2 определяются по формулам

$$\alpha_1 = \frac{2V_1}{\sqrt{\sigma_0 g}}, \quad \text{и} \quad \alpha_2 = \frac{2V_2}{\sqrt{\sigma_0 g}},$$

где V_1 — площадь водной поверхности озера от начала координат до поперечного сечения озера с наибольшей ординатой нормальной кривой; V_2 — площадь водной поверхности остальной части озера. На рис. 20 $V_1 = OB$, $V_2 = BC$. Буквой σ_m обозначена наибольшая ордината нормальной кривой; величина σ_m (на рис. 20) = 1030,5 км³, $V_1 = 1404,7$ км³, параметр $\alpha_1 = 883,6$ сек, $\alpha_2 = 1033,6$ сек.

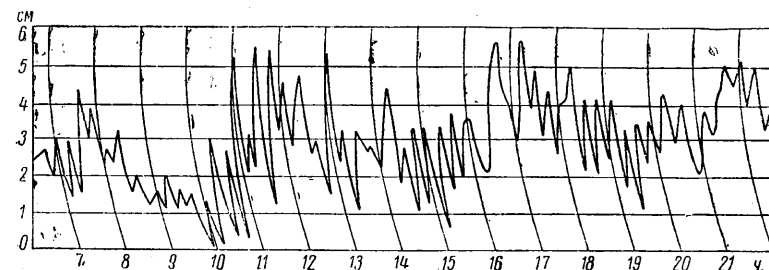


Рис. 19. Сейши Ладожского озера по записям самописца уровня у Сортанлахти за 26 VI 1926 г. (по Илмо Хела).

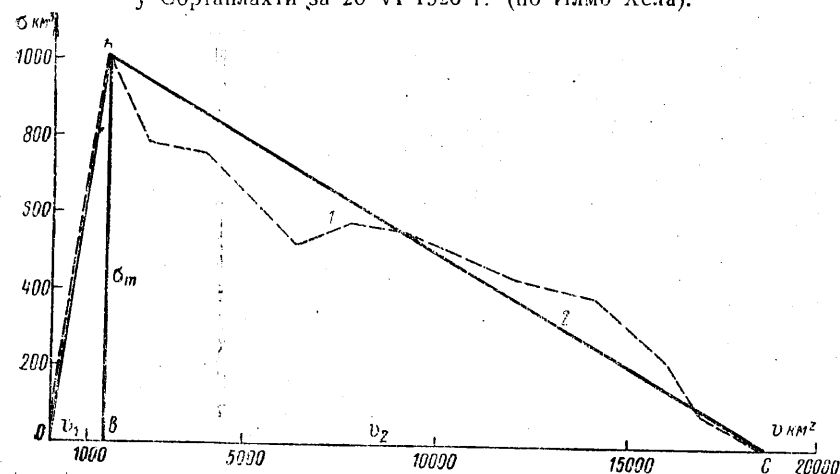


Рис. 20. Нормальная кривая Ладожского озера.
1 — нормальная кривая, вычисленная по морфометрическим данным; 2 — приближенная нормальная кривая озера.

Приведенное выше уравнение решалось методом последовательных приближений, причем значения функций Бесселя находились по таблицам этих функций [53]. В результате решения этого уравнения было найдено, что $T_1 = 4$ ч 55 мин. Аналогичным образом был найден период двухузловой продольной сейши, оказавшийся равным 2 ч 20 мин.

Далее были произведены расчеты периодов тех же сейш по методам Давыдова, Дефанга и Праудмэна и т. д. (см. табл. 13).

В ней обращает на себя внимание следующее. Периоды двухузловых сейш, вычисленные различными методами, незначительно отличаются друг от друга: максимальное отклонение от наблюдаемой величины составляет 8 мин, или 5%. Значительно

Таблица 13

Периоды продольных сейш Ладожского озера, рассчитанные различными методами

Виды сейш	Методы				
	Мериана, ч мин	Кристалла, ч мин	Давыдова, ч мин	Дефайта, ч мин	Праудмэна, ч мин
Одноузловая . . .	4 56	4 55	4 34	4 26	4 23
Двухузловая . . .	2 28	2 20	2 17	2 19	2 15

хуже обстоит дело с периодами одноузловой сейши. Максимальное отклонение от наблюдаемой величины достигает 25 мин, или 9%, причем наихудшие результаты дают методы Мериана и Кристалла. Это и понятно, если принять во внимание сравнительную сложность рельефа дна озера и большое число островов в нем.

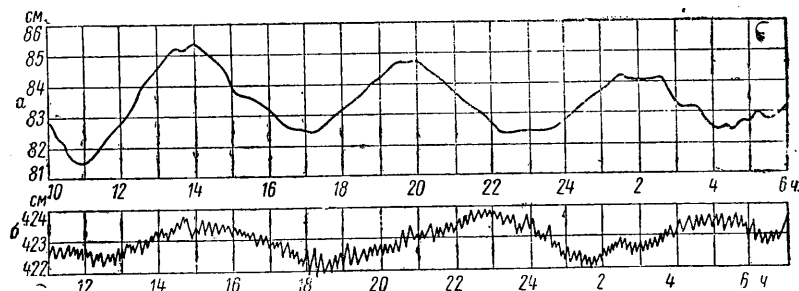


Рис. 21. Сейши Ладожского озера по записи самописцев уровня воды.
а — у с. Кобоны за 22–23 VIII 1962 г.; б — у с. Осиновца за 17–18 VI 1960 г.

Приведенные данные наблюдений по четырем постам и результаты расчетов позволяют считать, что сейша с периодом 4 ч 31 мин представляет собой одноузловую продольную сейшу, а сейша с периодом в 2 ч 20 мин — двухузловую продольную сейшу. Однако рассмотрение лимниграмм самописца уровня, установленного в Кобоне, заставляет критически отнестись к этому выводу. Действительно, по данным этого поста средний период сейши наибольшей длительности, вычисленный как средняя величина из данных для 66 волн (июль—ноябрь 1962 г.), оказался равным 5 ч 50 мин. С сейшами такого периода не пришлось встречаться при обработке самых разнообразных лимниграмм самописцев, установленных в остальных четырех пунк-

тах наблюдений. Для того чтобы дать представление о характере сейш, зарегистрированных самописцем в Кобоне, приводится рис. 21, где хорошо видна сейша с периодом около 6 ч. Возможно, что эти сейши представляют собою стоячие волны, возникшие в мелководной части озера.³

Большой интерес представляет положение узловых линий на озере. Расстояния узловых линий по продольной оси озера, считая от северного конца, были определены по методу Дефанта. Узловая линия одноузловой продольной сейши, по данным этих расчетов, находится на расстоянии около 110 км от северного конца озера. Узловые линии двухузловой продольной сейши отстоят одна на расстоянии около 50 км от северного конца и вторая — около 40 км от южного конца продольной оси озера.

Положение узловых линий объясняет некоторые особенности лимниграмм у маяка Сухо, на о-ве Валаам и в Сортанлахти. Самописец в Сортанлахти находится довольно близко к поперечному сечению, в котором располагается узловая линия одноузловой продольной сейши. Этим объясняется значительно меньшая амплитуда этой сейши у Сортанлахти, чем у маяка Сухо и у о-ва Валаам.

О-в Валаам находится в непосредственной близости к поперечному сечению, в котором расположена узловая линия двухузловой продольной сейши. К последней сравнительно близко находится и лимниграф у маяка Сухо. Этим и объясняется почти полное отсутствие на лентах этих самописцев записей двухузловых продольных сейш. Эту сейшу лучше можно проследить на ленте самописца, установленного в Сортанлахти.

Амплитуды одноузловых продольных сейш значительно больше амплитуды всех других видов сейш. Но и они не отличаются сколько-нибудь значительными величинами и, как правило, не превосходят 15 см, чаще же всего они близки к 5–6 см.

Большой интерес представляют сейши, возникающие в отдельных бухтах и заливах. Сведения о такого рода сейшах имеются в упомянутых выше статьях Илмо Хела и Т. И. Малининой. Как уже указывалось выше, Илмо Хела высказывает предположение, что сейша с периодом в 15 мин и с небольшими амплитудами представляет собой местную сейшу, возникающую в заливах Коневитсан и Сортанлахти.

Тщательные исследования сейш в Якимварском заливе в течение трех лет (1957—1959 гг.) производились экспедицией Лаборатории озероведения АН СССР. Экспедицией был оборудован ряд водомерных постов (рис. 22). На двух из них (№ 1 и № 2, последний при выходе из залива в открытое озеро) были установлены самописцы типа «Валдай». Самописец на посту № 1 работал с 1 июля по 9 сентября 1957 г. и с 26 июня по

³ Может быть, на озере существуют, кроме того, сейши с таким периодом, возникающие вокруг оси, соответствующей наибольшей протяженности озера (218 км).

15 сентября 1958 г., на посту № 2 — со 2 августа по 6 сентября 1957 г. и со 2 июля по 20 сентября 1958 г.

Кроме основных установок, как сообщает Т. И. Малинина [30], одновременно с регистрацией уровня на указанных двух постах использовался микролимниграф системы В. П. Матвеева. Этот самописец устанавливался в различных частях Якимварского залива и в других заливах озера. Т. И. Малинина произвела обработку лент самописца уровня и рассчитала периоды сейш, возникающих в заливе. В результате

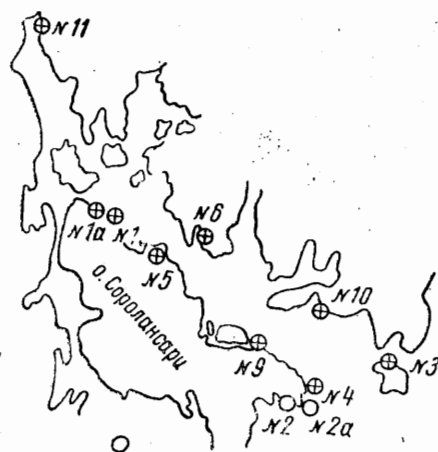


Рис. 22. Схема расположения водомерных постов в Якимварском заливе Ладожского озера, устроенных экспедицией Лаборатории озерадения АН СССР.

бой четырехузловую продольную сейшу всего Ладожского озера. Средний период этой сейши подсчитан Т. И. Малининой по данным для 725 волн, зарегистрированных самописцами на обоих постах.

Анализ записей микролимниграфа позволил Малининой установить существование в Якимварском заливе еще трех волн: одной с периодом около 10 мин, второй с периодом около 8 мин и третьей с периодом в 2 мин.

Несмотря на относительно небольшие амплитуды сейш, они, по всей вероятности, оказывают значительное влияние на перемешивание воды в озере. Можно предполагать, что в период отчетливо выраженной стратификации водной массы озера возникают и внутренние сейши, вызывающие перемешивание водных масс озера и тем самым оказывающие влияние на распределение температуры и содержания кислорода в воде озера в летний период. Было бы весьма желательно поставить специальные исследования по изучению внутренних сейш на Ладожском озере.

расчетов оказалось, что период одноузловой продольной сейши залива по формуле Мериана 24,2 мин, по Дюбуа — 28,0 мин, по методу Давыдова — 20,8 мин и Дефанта — 21,2 мин.

При обработке лент самописцев на водомерном посту № 1 была выделена прежде всего продольная одноузловая сейша, период которой в среднем из данных по 29 волнам оказался равным 4 ч 38 мин. Средний из 33 волн период той же сейши по лимниграммам самописца на посту № 2 оказался равным 4 ч 39 мин. На лентах обоих самописцев обнаружена, кроме того, сейша с периодом в 56 мин. Эта сейша, по-видимому, представляет со-

ГЛАВА III

СЕЙШИ ОНЕЖСКОГО ОЗЕРА

Онежское озеро, второе после Ладожского по величине озеро в Европе, находится в бассейне р. Невы. Площадь водной поверхности озера 9890 км², длина 248 км, наибольшая ширина 79 км, средняя глубина 30,5 м.

Береговая линия озера в его северной части сильно изрезана и расчленена узкими губами и заливами, вытянутыми с севера на юг. Южная, юго-восточная и западная части озера, напротив, отличаются правильностью и выраженностью береговой линии.

Дно Онежского озера отличается чрезвычайно сложным строением и крайней неравномерностью в распределении глубин. По характеру дна все озеро разделяется на две части — северную и южную, примерно по линии г. Петрозаводск — устье р. Водлы. Южная часть — сравнительно ровный по рельефу дна водоем, обширный и глубокий, в котором глубины уменьшаются к югу. Северная часть озера отличается чрезвычайной контрастностью: сочетанием глубоких впадин с повышением дна на весьма небольших площадях. Здесь же расположены и наибольшие глубины озера.

В Онежском озере насчитывается 1369 островов, причем некоторые из них отличаются значительными размерами. Таковы, например, о-в Климецкий (148 км²), Большой Леликовский (21 км²) и др.

Значительные размеры озера, обеспечивающие разгон ветра, форма его, вытянутая почти по меридиану, представляют собой условия, благоприятствующие образованию сейш и сейшеобразных колебаний. Особенности морфологии дна, обилие островов, изрезанность береговой линии создают сложную обстановку для развития этих явлений. Режим же ветров благоприятствует периодическим колебаниям водной массы озера.

По данным имеющихся наблюдений, в северной части озера господствуют почти весь год ветры южных направлений с отклонением в марте, апреле, июле, августе, сентябре, октябре и ноябре к З. В мае и июне здесь наблюдается изредка изменение направления ветра к В и СВ.

В средней части озера (примерно по линии Петрозаводск — устье р. Водлы) преобладает западное направление ветра, причем осенью, зимой и весной имеет место некоторое отклонение к Ю, а летом к С. -

В южной части озера большую часть года преобладают ветры южных румбов, кроме июня, когда господствует северо-западный ветер, и июля с преимущественно западным направлением ветра.

В Петрозаводске в период май — август хорошо выражен бризовый режим ветра. Днем преобладают ветры восточных румбов (ЮВ, В, СВ), а утром и вечером западных (ЮЗ и З).

Наиболее сильными ветрами почти всюду являются южные ветры, причем ветры со скоростью более 10 м/сек наблюдаются в зимние месяцы (ноябрь — январь). В июле их почти не бывает. Этот же месяц отличается наибольшим числом дней со штилем.

Под воздействием ветра на Онежском озере наблюдаются нагоны, сгоны, сейши и сейшеобразные колебания. Нагоны и сгоны на Онежском озере наиболее сильно выражены в его южной мелководной части. Однако и здесь величина подъема уровня при нагоне не превышает 25 см. Очевидно, что и сейши и сейшеобразные колебания в Онежском озере также должны отличаться малыми амплитудами.

Сейши Онежского озера почти не изучены. Вместе с тем известно, что впервые сейши в России были отмечены именно на Онежском озере. Инженер Стабровский опубликовал в 1857 г. небольшую статью [82], посвященную сейшам Онежского озера. В этой статье Стабровский впервые назвал описываемое явление сейшей, задолго до того, как Форель ввел в научную литературу этот термин. Стабровский в общем правильно объяснил причины возникновения сейш.

Началом изучения сейш нужно считать 1956 г., когда Ленинградским отделением Гидропроекта близ устья р. Вытегры был установлен самописец уровня типа «Валдай», проработавший до 1959 г. Здесь же был организован и водомерный пост, наблюдения на котором производились по обычной программе. Одного самописца уровня, конечно, вовсе недостаточно для того, чтобы получить сколько-нибудь отчетливое представление о сейшах на таком большом водоеме, как Онежское озеро. Ленты указанного самописца и были использованы в настоящей работе.

Для того чтобы получить в первом приближении представление о периодах сейш Онежского озера, были вычислены эти

периоды для продольных и поперечных сейш по формуле Мернана.⁴ Результаты этих расчетов приведены в табл. 14.

Вне всякого сомнения, приведенные данные о периодах сейш с различным числом узлов носят весьма приближенный характер, если принимать во внимание сложность очертания береговой линии озера и распределения глубин (рис. 23).

Таблица 14

Периоды сейш Онежского озера, рассчитанные по формуле Мернана

Число узлов	Продольная сейша, ч мин	Поперечная сейша, ч мин
1	8 00	2 26
2	4 00	1 13
3	2 40	0 49
4	2 00	0 36
5	1 36	0 29
6	1 20	0 24

Тем не менее данные, приведенные в табл. 14, позволили определить, какого рода сейши записаны в тех или иных случаях на лентах самописцев уровня в Усть-Вытегре. Просмотр большого числа лент этого самописца за время 25 мая—1 сентября 1956 г., 15 мая—19 сентября 1957 г., 23 мая—2 сентября 1958 г. и 27 мая—17 октября 1959 г. позволили прийти к следующим заключениям: 1) все ленты самописцев характеризуют сложные сейши, причем чаще сейшеобразные колебания, чем сейши в чистом виде; 2) сейши чаще всего возникают после сгонов, нагонов; амплитуды сейш невелики и в подавляющем большинстве случаев не превышают 5 см; наибольшая амплитуда сейш по данным наблюдений в Усть-Вытегре составляла 8,4 см (19 июня 1957 г.).

На рис. 24 для иллюстрации приведена лимниграмма самописца уровня в Усть-Вытегре за 18—19 сентября и 19—20 июня 1959 г.

⁴ От применения других способов расчета периодов сейш пришлось отказаться по причине схематичности батиметрической карты Онежского озера и сложности рельефа дна.

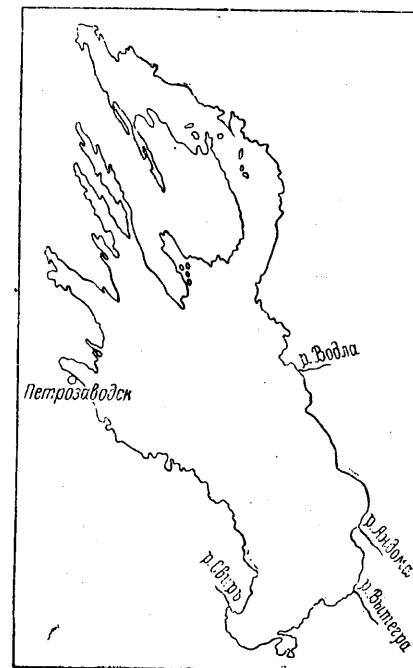


Рис. 23. Схема Онежского озера.

Ленты этого самописца за все время наблюдений были подвергнуты обычной статистической обработке для определения средних значений периодов зарегистрированных сейш. Результаты такой обработки приведены в табл 15.

Данные этой таблицы позволяют констатировать, что за все время наблюдений ни разу не была зарегистрирована одно-

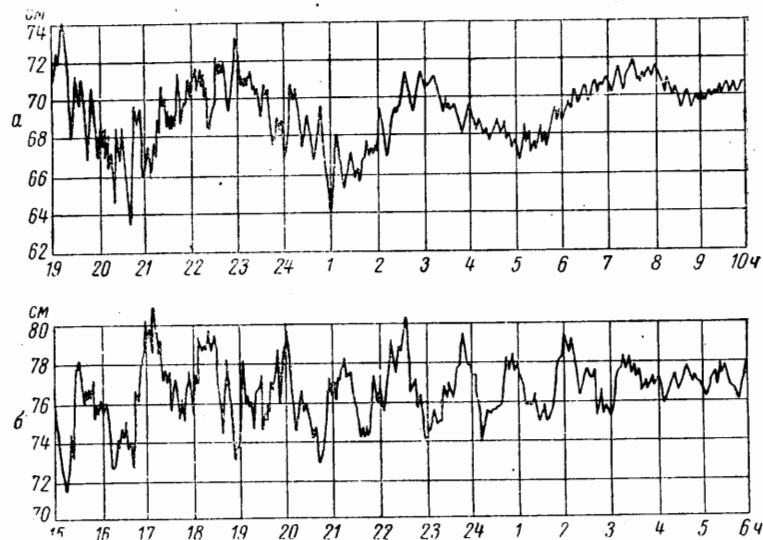


Рис. 24. Сейши Онежского озера по записи самописца уровня в Усть-Вытегре.
а — за 18—19 IX; б — за 19—20 VI 1959 г.

узловая продольная сейша. В равной мере ни разу не была отмечена и одноузловая поперечная сейша. Поперечная двухузловая сейша наблюдалась более 2,5 раз чаще, чем двухузловая продольная. Кроме этих двух видов сейш, были отмечены трехузловая поперечная сейша с периодом в 40 мин и сейша с периодом около 18 мин. Последняя, по всей вероятности, представляет

собой местную сейшу, возникающую в заливе, где установлен самописец уровня.

То обстоятельство, что на Онежском озере за все время наблюдений не был отмечен ни один случай одноузловой продольной сейши, быть может, можно объяснить тем, что южные и северные ветры создают самостоятельные периодические колебания в центральной и южной частях озера и в губах и заливах северной его части и их интерференция не создает продольной одноузловой сейши.

Частые появления поперечных сейш, в особенности в июле, можно объяснить тем, что в это время над озером, как отмечалось ранее, господствуют ветры западного направления. В теплое время года (май — август) часто хорошо выражен бризовый характер ветров, утром и вечером западных, днем восточных. И те и другие могут являться причиной возникновения поперечных сейш, а смена их направления может привести к возникновению двухузловой поперечной сейши.

Таблица 15

Периоды сейш Онежского озера, полученные в результате статистической обработки лент самописца уровня, установленного в Усть-Вытегре

Виды сейш	Число волн	Средний период, ч мин
Продольная двухузловая	119	4 12
Поперечная	293	1 13

ГЛАВА IV

СЕЙШИ ЧУДСКО-ПСКОВСКОГО ОЗЕРА

Чудско-Псковское озеро по своим размерам занимает следующее место после крупнейших озер Русской равнины — Ладожского и Онежского. Площадь водной поверхности Чудско-Псковского озера равна 3582 км.² Бассейн озера вытянут в меридиональном направлении.

Чудско-Псковское озеро обычно делится на три части — Чудское, Теплое и Псковское озера (рис. 25).

Несмотря на большие размеры, озеро мелководно; наибольшая глубина его всего лишь 14,6 м, а средняя глубина — 7,3 м.

Береговая линия в общем характеризуется относительно плавными очертаниями. Бухты и заливы сравнительно редки. Берега озера в основном низкие, заболоченные, заливаемые в половодье. Только в средней части озера берега возвышенные, местами крутые и обрывистые.

Рельеф дна всего водоема отличается относительным однообразием, но вместе с тем каждая из трех его частей обладает характерными особенностями. Самым глубоким является Чудское озеро, средняя глубина 7,8 м. Самое мелководное — Теплое озеро, средняя глубина 3,3 м. Вместе с тем наибольшая глубина Теплового озера 14,6 м является в то же время наибольшей глубиной всего озера. Наибольшая глубина Чудского озера 10,7 м. Большая площадь озера занята глубинами порядка 6—8 м. Центральная часть озера отличается очень ровным и плоским дном. Вдоль всего побережья почти везде тянутся песчаные отмели.

В Теплом озере наиболее распространены глубины порядка 2—4 м. Глубокие участки вытянуты здесь вдоль оси озера.

Из всех трех частей Чудско-Псковского водоема Псковское озеро отличается наиболее однообразным рельефом дна. Средняя глубина этого озера 3,8 м, максимальная — 5,4 м. Наибольшую площадь занимают глубины 3—4 м.

Деление всего водоема на три части носит до некоторой степени условный характер, так как ясно выраженной границы между этими частями не существует.

Сейши Чудско-Псковского озера почти не изучены. Только в отчетах Гидрологического отдела Эстонского управления гидрометеорологической службы упоминается о сейшах на Чудско-Псковском озере. В литературе имеется всего лишь одна статья Т. Ф. Эйпре [55]. Автор отмечает наличие периодических колебаний уровня озера в летний период. Наиболее интересные сейши, по указанию Эйпре, наблюдались 12, 21 и 22 июня 1954 г. с амплитудой колебаний 34—44 см и с периодом в 2 ч 25 мин. В 1956 г. наиболее замечательные, по мнению Эйпре, сейши были отмечены 4, 11, 16 и 17 июля с амплитудой 28—29 см и с периодом в 2 ч 20 мин — 2 ч 30 мин.

Непрерывная регистрация колебаний уровня на Чудско-Псковском озере при помощи самописцев производилась в течение сравнительно короткого промежутка времени. Всего на рассматриваемом озере было установлено три самописца: на западном берегу озера в устье р. Мустве (см. рис. 25), в районе м. (Мехикоорма и в устье р. Нарвы, в районе с. Васькнарва.

Первоначально, в сентябре 1952 г., в устье р. Мустве был установлен мареограф, работавший недолго. В мае 1953 г. вся установка самописца была снесена стрелой плавучего крана. В том же году на том же месте мареограф был снова установлен, а в июне 1954 г. он был заменен самописцем уровня типа «Валдай». В настоящем исследовании обработке были подвергнуты лимниграммы лишь за 1955—1960 гг. и частично (январь — май) за 1961 г., так как ранние записи обладали существенными недостатками.

В августе 1960 г. был установлен самописец уровня также

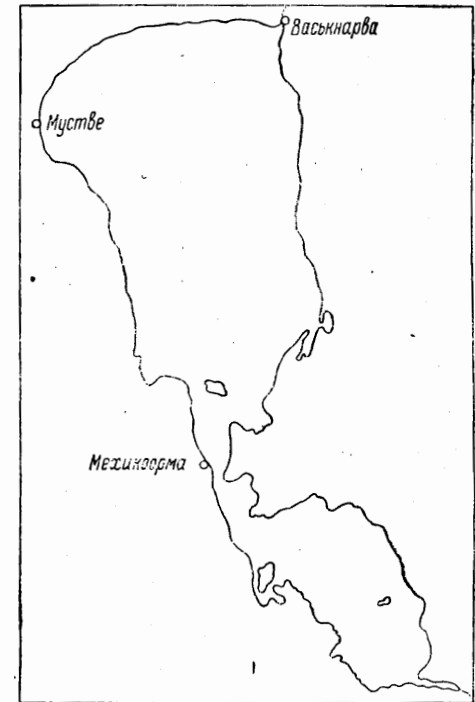


Рис. 25. Схема Чудско-Псковского озера.

типа «Валдай» на Теплом озере, в районе м. Мехикоорма. В декабре 1960 г. начал работать самописец уровня в устье р. Нарвы. Лимниграммы этих двух самописцев не отличаются высоким качеством, почему для обработки удалось использовать небольшое число их лент. На Псковском озере нет и не было установлено ни одного самописца уровня.

Просмотр большого числа лент всех трёх самописцев позволил прийти к выводу, что записи их не отличаются большой сложностью и вместе с тем, как это будет видно из дальнейшего, между ними существуют некоторые различия (рис. 26).

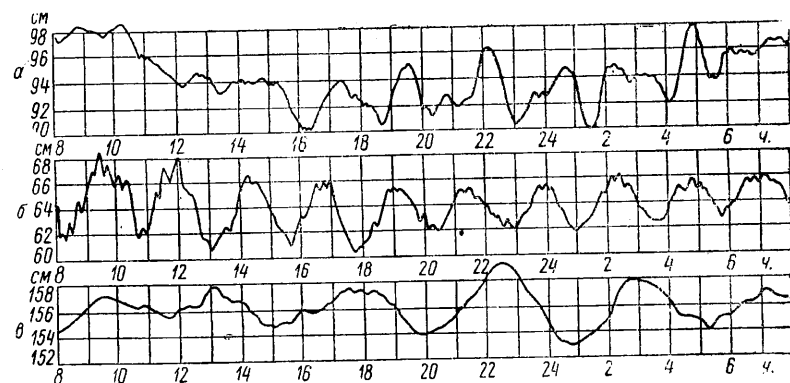


Рис. 26. Сейши Чудско-Псковского озера по записям самописцев уровня.

а — на в/п Васьякнарва за 13—14 VI 1961 г.; б — на в/п Мустве за 23—24 VII 1959 г.; в — на в/п Мехикоорма за 23—24 XII 1960 г.

Лимниграммы самописца у м. Мехикоорма носят более простой характер, чем лимниграммы других самописцев. На лимниграммах самописца в устье р. Мустве можно часто заметить сейши с малым периодом колебаний, порядка 15—18 мин. Это, по-видимому, сейши местного происхождения, возникающие в заливе, в который впадает р. Мустве. На лимниграммах в с. Васьякнарва иногда бывают отмечены сейши с периодом около 1 ч. Возможно, что это четырехузловая продольная сейша Чудского озера.

В результате обработки лент самописца уровня в устье р. Мустве обычным статистическим методом были получены периоды сейши Чудского озера, наиболее отчетливо выраженной и наиболее часто повторяющейся. Сводка полученных данных приводится в табл. 16.

Как видно из приведенных данных, продолжительность периода сейши Чудского озера, вычисленного за отдельные месяцы, изменяется в пределах 2 ч 14 мин — 2 ч 30 мин. Средняя же продолжительность периода этой сейши, по приведенным данным, составляет 2 ч 22 мин.

Таблица 16
Средние периоды сейш Чудского озера, по данным самописца уровня в устье р. Мустве

Годы	Месяцы									
	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	
	ч мин	ч мин	ч мин	ч мин	ч мин	ч мин	ч мин	ч мин	ч мин	
1955	—	—	2 18	2 18	2 17	2 23	2 20	2 24	2 22	
1956	—	—	2 16	2 16	2 18	2 20	2 20	2 22	2 25	
1957	—	2 23	2 18	2 20	2 22	2 19	2 22	2 21	2 19	
1958	—	—	2 20	2 17	2 20	2 21	2 25	2 29	2 24	
1959	2 23	2 21	2 14	2 18	2 24	2 25	2 30	—	2 28	
1960	—	—	2 23	2 25	2 25	2 24	2 27	2 25	2 27	
1961	2 24	2 23	2 21	—	—	—	—	—	—	

Аналогичные подсчеты по лимниграммам самописца уровня водомерного поста в с. Васьякнарва дали среднюю продолжительность периода сейши, равную 2 ч 14 мин. Если принять среднее из данных по обоим пунктам за период рассматриваемой сейши, то он оказывается равным 2 ч 18 мин. Такая же величина была получена при вычислении периода сейши по методу Бюи-Балло по лимниграмме самописца уровня в устье р. Мустве за 23—24 июля 1959 г.

Остается неясным, что представляет собой эта сейша. Для ответа на этот вопрос надлежит сравнить полученные данные с данными наблюдений на водомерном посту у м. Мехикоорма. Статистическая обработка лент самописца уровня этого пункта наблюдений дала следующие результаты. Период сейши по данным за 1960 г. оказался равным 4 ч 38 мин, а за 1961 г. — 4 ч 54 мин. За истинный период этой сейши можно принять $T=4$ ч 51 мин.

Таким образом, самописец уровня у м. Мехикоорма регистрировал сейши с периодом, почти вдвое большим, чем период сейш, регистрируемых двумя другими самописцами (на водомерных постах в с. Васьякнарва и в устье р. Мустве). К сожалению, отсутствие наблюдений на Псковском озере не дает возможности установить связь отмеченных сейш с сейшами этого водоема.

Для того чтобы установить, что собой представляют сейши, зарегистрированные самописцами, были произведены расчеты периодов сейш теоретическими методами и, кроме того, проведен ряд экспериментов искусственного воспроизведения сейш на модели Чудско-Псковского озера. Отсутствие совершенной батиметрической карты озера заставляет предполагать, что результаты расчетов и опытов в лаборатории с моделью носят приближенный характер.

Была сделана попытка вычислить период одноузловой про-

дольной сейши при помощи метода, разработанного японскими учеными (см. стр. 22) для озера, состоящего из двух озер, соединенных проливом, но результаты расчета получились совершенно невероятными: период оказался равным приблизительно 20 ч.

Наличие достаточно узкого пролива с резким изменением характера рельефа дна и с преобладающими малыми глубинами позволяет предполагать, что едва ли существует единая продольная сейша для всего водоема. Вероятнее всего предположить существование самостоятельных продольных сейш в каждой из двух больших частей рассматриваемого водоема, т. е. в Чудском и Псковском озере самостоятельно.

В соответствии с таким предположением были произведены расчеты отдельно для каждого из этих водоемов. Расчеты производились по формуле Мериана, методам Дефанта и Давыдова. Результаты расчета приведены в табл. 17.

Таблица 17

Периоды продольной одноузловой сейши, вычисленные при помощи различных методов

Озера	По методу		
	Мериана, ч мин	Дефанта, ч мин	Давыдова, ч мин
Чудское	5 30	4 30	4 27
Псковское	4 53	4 00	4 10

При расчетах длина Чудского озера была принята равной 91,8 км, Псковского — 56,4 км, средняя глубина Чудского озера — 7,8 м, Псковского — 3,3 м.

Сравнение результатов расчета с данными записей самописца уровня у м. Мехикоорма позволяет прийти к выводу, что сейша, зарегистрированная этим самописцем, представляет собой продольную одноузловую сейшу Чудского озера.

Остается неясным, к какому виду нужно отнести сейшу с периодом в 2 ч 20 мин, зарегистрированную самописцами уровня в с. Васькнарва и в устье р. Мустве. Здесь возможны два предположения: это либо двухузловая продольная сейша Чудского озера, либо ее одноузловая поперечная сейша. Периоды обеих сейш по данным расчета довольно близки друг к другу. Рассмотрим оба предположения.

Если допустить, что это двухузловая продольная сейша Чудского озера, то пучности этой сейши должны находиться на обоих концах оси этого озера. Отсюда следует, что самописец уровня у м. Мехикоорма всякий раз, когда самописец уровня в с. Васькнарва отмечает появление продольной двухузловой сейши, должен также регистрировать эту сейшу. Между тем

этого никогда не бывает. Остается предположить, что рассматриваемая сейша есть поперечная одноузловая сейша.

В пользу этого предположения говорит еще то обстоятельство, что сильные ветры с западной составляющей представляют собой довольно частое явление на Чудско-Псковском озере. Кроме того, так как узловая линия этой сейши примерно совпадает с продольной осью озера, то у м. Мехикоорма, расположенного на южном конце этой линии, поперечная сейша не должна быть выражена, в то время как в устье р. Мустве и в с. Васькнарве, расположенных в стороне от продольной оси — узловой линии одноузловой поперечной сейши, эта последняя должна быть отчетливо видна на лимниграммах, что и наблюдается в действительности.

Как указывалось раньше, сейши Чудско-Псковского озера изучались, кроме того, на модели. В лаборатории кафедры гидрологии суши лаборантом кафедры А. Е. Золотаревым была сооружена модель озера с искаженным масштабом: вертикальным 1:200 и горизонтальным 1:125 000. Такая значительная разница в вертикальном и горизонтальном масштабах была принята с учетом малых глубин озера. Модель была сооружена из пластика (дно и берега). Запись колебаний уровня производилась самописцами. Вертикальный масштаб записи составлял 5 см уровня в 1 см ленты, горизонтальный — 1 сек в 1 делении ленты. Самописцы были установлены в пунктах, соответствующих расположению самописцев уровня в озере и, кроме того, в пункте на юго-западном берегу Псковского озера.

Серия опытов над сейшами на модели Чудско-Псковского озера была проделана старшими лаборантами кафедры Л. Н. Дубровиной и А. Е. Золотаревым. Сейши возбуждались либо покачиванием модели в вертикальном направлении, либо ритмическим погружением стеклянной пластинки в воду модели.

Период сейши определялся в результате статистической обработки полученных лимниграмм. Найденная по более или менее значительному числу волн величина периода T' представляла собой величину периода сейши модели. Для вычисления периода сейши озера в естественных условиях применялась та же формула, что и при исследовании сейш Белого озера.

Прежде всего была сделана попытка исследовать одноузловую продольную сейшу для всего водоема в целом. Для этого ритмическим погружением стеклянной пластинки в северной части модели Чудского озера возбуждалась сейша, которая должна была бы представлять собой продольную одноузловую сейшу всего водоема в целом. В соответствии с этим можно было ожидать, что она будет достаточно отчетливо выражена на лимниграмме самописца, установленного на юго-западном берегу Псковского озера. Однако этого не случилось. На указанном самописце нельзя было обнаружить сколько-нибудь заметных колебаний уровня, в то время как на лентах самописца,

установленного в точке модели, соответствующей водомерному посту у м. Мехикоорма, эта сейша была отчетливо выражена (рис. 27). По-видимому, колебания уровня гасились и островом, расположенным в южной части Чудского озера перед входом в Теплое озеро, и узким проливом (Теплым озером). Период отмеченной сейши, определенный по записи самописца на модели с последующим пересчетом по принятой формуле, оказался равным 4 ч 57 мин.

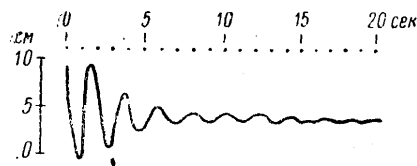


Рис. 27. Лимниграммы самописца уровня воды в модели Чудско-Псковского озера (без перегородок), установленного в пункте, соответствующем в естественных условиях в/п Мехикоорма.

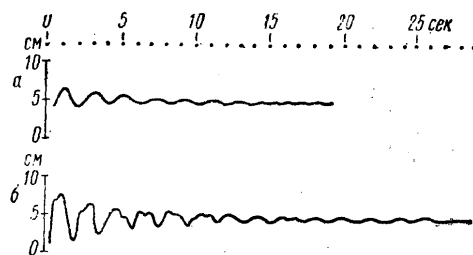


Рис. 28. Лимниграммы самописцев уровня воды в модели Чудско-Псковского озера при наличии одной перегородки. а — самописец установлен в оз. Псковском; б — самописец установлен в оз. Чудском.

В следующей серии опытов с моделью была установлена перемычка в наиболее узком месте Теплого озера и покачиванием модели возбуждалась сейша. Эта сейша была хорошо заметна на лимниграммах всех самописцев (рис. 28). В результате обработки лент самописцев было установлено, что периоды продольных одноузловых сейш оказались на Чудском озере 4 ч 12 мин, на Псковском — 4 ч 46 мин. Полученные таким образом величины периодов продольной одноузловой сейши довольно близки к величинам периодов, полученным путем расчета их по методам Дефанта и Давыдова.

Дополнительно была проделана серия опытов на модели с двумя перегородками — в начале и в конце Теплого озера. Результаты измерений дали периоды одноузловой продольной сейши, близкие к полученным ранее.

В заключение была сделана попытка возбудить в Чудском озере на модели поперечную сейшу. Период ее после соответствующей обработки лент самописца уровня оказался 2 ч 20 мин. Полученная величина периода поперечной сейши Чудского озера еще раз подтверждает справедливость сделанного ранее вывода о том, что зафиксированная в естественных условиях самописцами в с. Васьянарва и в устье р. Мустве сейша действительно представляет собой поперечную одноузловую сейшу. На рис. 29 показан образец записи самописца на модели колебаний уровня Чудского озера при поперечной сейше.

Просмотр большого числа лент самописцев, установленных на Чудско-Псковском озере, позволяет отметить, что для этого водоема характерно преобладание сейш летом, особенно в июле.

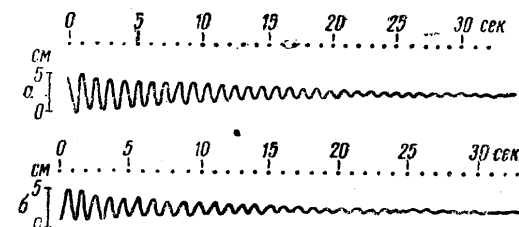


Рис. 29. Поперечная сейша по записи самописца уровня в модели Чудско-Псковского озера. а — самописцы установлены в пунктах, соответствующих в естественных условиях в/п Мустве; б — в/п Васьянарва.

Амплитуды сейш Чудско-Псковского озера, вообще говоря, невелики. Т. Ф. Эйпре в упомянутой выше статье сообщает о больших амплитудах сейши в устье р. Мустве 12, 21 и 22 июня, равных 34, 35 и 44 см, отмечая при этом, что эти большие амплитуды относятся к первой наивысшей волне колебаний. По всей вероятности, в этих случаях наблюдалась не сейша в чистом виде, а сейшеобразные колебания, возникшие в результате нагона или сгона. Сказанное относится в равной мере к сейше в июле 1956 г., когда амплитуда, по сообщению Эйпре, менялась в пределах 25—29 см. Еще большая амплитуда была отмечена позднее, 30 марта 1961 г. Самописец в устье р. Мустве отметил в этот день амплитуду, равную 43,8 см. Амплитуда продольной сейши в чистом виде обычно не превышает 12 см. Амплитуда поперечной сейши еще меньше и по имеющимся данным не больше 6 см.

Таким образом, относительно сейш Чудско-Псковского озера можно сделать следующие выводы. Сейши на этом озере представляют собой явление, наблюдающееся довольно часто. Единая продольная одноузловая сейша для всего водоема в целом не существует. В каждом из составляющих озер возникают самостоятельные продольные сейши. Кроме одноузловой продольной сейши, на Чудском озере иногда наблюдается двухузловая продольная сейша и сейша с периодом около 15 мин. Это, по-видимому, сейша местного происхождения.

Было бы весьма желательно в дальнейшем установить самописцы уровня на восточном берегу Чудского озера и на обоих берегах Псковского. Наблюдения над сейшами было бы желательно сопровождать непрерывной регистрацией направления и скорости ветра.

ГЛАВА V

СЕЙШИ оз. СЕВАН

Оз. Севан, или Гокча,—одно из крупнейших высокогорных озер СССР, расположено в северо-восточной части Армянского нагорья на высоте 1916 м над уровнем моря. До сооружения каскада гидроэлектростанций на р. Занге и до спуска части вековых запасов вод озера через эту реку площадь водной поверхности озера составляла 1416 км².

По характеру рельефа дна озеро можно было подразделить на две части (рис. 30): Малый (северо-восточный) и Большой (юго-восточный) Севан. Общее протяжение озера по его продольной оси 75 км. Площадь водной поверхности Малого Севана 384 км², Большого—1032 км².

Малый Севан отличается большой как средней, так и наибольшей глубиной, менее спокойным рельефом дна по сравнению с Большим Севаном. Средняя глубина последнего около 40 м, при наибольшей—не более 52 м. Средняя же глубина Малого Севана 60 м, при максимальной—99 м. Эта глубина являлась и максимальной для всего озера (до спуска вод).

Средняя глубина всего озера равнялась 41,3 м.

Оз. Севан отличается своеобразным ветровым режимом. В холодное время года здесь преобладают западные и южные ветры, в теплое—северные и северо-восточные. Эта смена направлений ветров в бассейне оз. Севан обуславливается особенностями атмосферной циркуляции в Закавказье. Наряду с такого рода ветрами на всем побережье Севана можно наблюдать горные ветры и бризы.

Для оз. Севан характерны довольно частые сильные ветры, получившие свои местные наименования: Мазра, Чубухлинский, Каранлуг и Эриванский ветер. Эти ветры довольно подробно описаны Н. Г. Николаевым [37]. Ветер Мазра получил свое название от Мазринской равнины, со стороны которой он подходит к озеру. Его направление (ЮВ) почти совпадает с направлением главной оси озера. Скорости этого ветра достигают

20 м/сек. Под действием этого ветра происходил сгон воды в юго-восточной части и нагон в северо-западной части озера. Наибольшая повторяемость ветра Мазра в июле. На юго-восточном побережье в среднем пять дней в течение этого месяца дует описываемый ветер со скоростью более 10 м/сек.

Чубухлинский ветер характерен для Малого Севана. Название свое он получил от Чубухлинского залива, вдоль которого

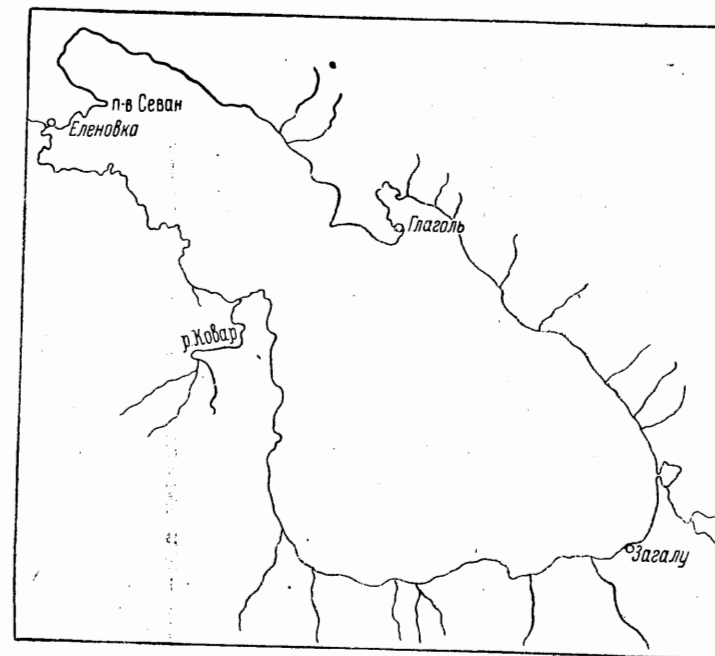


Рис. 30. Схема оз. Севан

дует этот ветер. Направление его СЗ, ССЗ и ССВ. Чаще всего он наблюдается летом (июнь—сентябрь) и характеризуется скоростями до 14 м/сек. Чубухлинский ветер дует почти поперек Малого Севана и воздействует на водные массы только этой части озера.

Каранлуг, или Каранлугский ветер,—юго-западного или южного направления. Он назван по имени селения Каранлуг в Большом Севане. Этот ветер дует по преимуществу в холодное время года. Скорость его более 10 м/сек. Обычно, как отмечает Н. Г. Николаев, одновременно с Каранлугским ветром дует Эриванский ветер, описываемый ниже. В северной половине этой части озера под действием Каранлуга и проникающих сюда порывов Эриванского ветра обычно наблюдается или ветер западного направления, или же весьма неровный ветер переменного направления, то южной, то западной составляющей.

При Каранлугском ветре весь Большой Севан покрывается огромными волнами.

Эриванский ветер юго-западного, западно-юго-западного и западного направления. Ветры этих направлений чаще всего дуют в северо-западной части Малого Севана. Эриванский ветер наблюдается главным образом в холодное время года, в особенности в декабре, марте и апреле. Скорости этого ветра достигают 14 м/сек.

Н. Г. Николаев отмечает, что около 30% всех наблюдаемых в бассейне оз. Севан сильных ветров возникает при грозовых шквалах, наиболее часто наблюдающихся в теплое время года. Во время этих шквалов скорость ветра достигает 20—30 м/сек и более. Иногда грозовые шквалы одновременно развиваются в различных частях бассейна озера и движутся в разнообразных направлениях. Грозовые шквалы нередко сопровождаются ливнями. Чаще всего такие шквалы наблюдаются в мае.

Большие размеры озера, довольно частая повторяемость сильных ветров различных направлений и силы создали благоприятные условия возникновения сейш и сейшеобразных колебаний. На основании анализа режима ветров в бассейне озера на нем возможно существование как продольных, так и поперечных сейш. Данные фактических наблюдений подтверждают справедливость сказанного.

Сейши на оз. Севан впервые были отмечены еще в 1852 г. Нёшелем [78], наблюдавшим их в с. Еленовка в июне указанного года. Нёшель вел наблюдения за уровнем озера через каждые 5 мин в течение нескольких дней. Е. С. Марков отмечает: «Несмотря на кратковременность наблюдений, Нёшелю удалось отметить сейши с периодом в 1—2 часа, а также более короткие колебания с периодом от 10 до 40 минут. Амплитуда колебаний достигала 3,5, даже 4 дюймов» [32, ст. 157]. Как указывает Л. С. Берг [3], явление сейш не было известно Нёшелю. Для объяснения этого явления Нёшель привел совершенно фантастические соображения.

После Нёшеля в течение длительного промежутка времени никто изучением сейш оз. Севан не занимался. Только в октябре 1926 г. Севанским гидрометеорологическим бюро был установлен самописец уровня в с. Еленовка (см. рис. 30). В 1928 г. начал работать самописец уровня в с. Загалу, а в 1929 г. был установлен лимниграф в бухте Глаголь.

Изучение сейш оз. Севан не являлось самостоятельной задачей Севанского гидрометеорологического бюро, но тем не менее этой организацией был накоплен интересный и ценный материал, позволяющий сделать некоторые выводы относительно сейш оз. Севан.

Б. Д. Зайков опубликовал краткие сведения о сейшах оз. Севан в «Материалах по исследованию озера Севан» [17] и подчеркнул, что за все время работы лимниграфов (с. Еленовка, 1925—

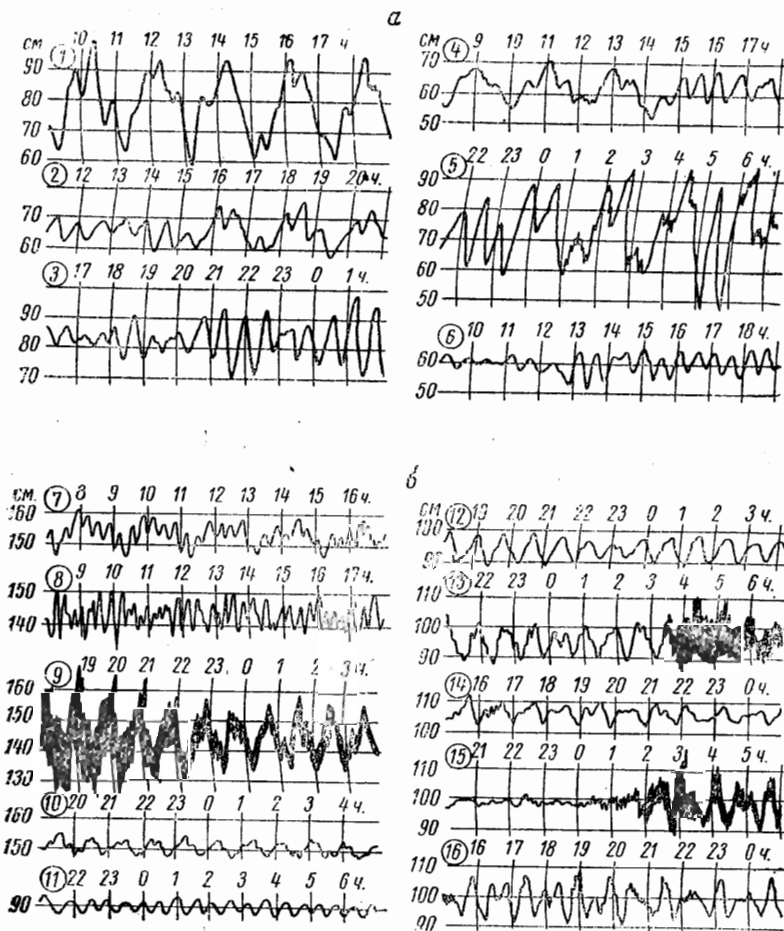


Рис. 31. Сейши оз. Севан по записи самописца уровня воды.

а — у с. Еленовка; б — у с. Загалу; 1 — за 29 IX 1929 г.; 2 — за 24 VI 1930 г.; 3 — за 18—19 IX 1929 г.; 4 — за 12 IV 1930 г.; 5 — за 15—16 V 1929 г.; 6 — за 31 V 1930 г.; 7 — за 2 VII 1928 г.; 8 — за 22 V 1928 г.; 9 — за 26—27 V 1928 г.; 10 — за 1—2 V III 1928 г.; 11 — в Арданышском заливе (Глаголь) за 19—20 IX 1930 г.; 12 — за 8—6 X 1930 г.; 13 — за 3—4 X 1929 г.; 14 — за 2—3 X 1929 г.; 15 — за 12—13 V 1930 г.; 16 — за 13—14 V 1930 г.

1930; бухта Глаголь, сентябрь—декабрь 1929 г.; с. Загалу, май—август 1928 г.) ни на одной лимниграмме нельзя обнаружить ни одной плавной линии и всегда можно видеть отчетливо выраженные колебания, носящие периодический характер.

В работе Б. Д. Зайкова приводятся образцы записей самописцев уровня по указанным выше пунктам (рис. 31). Как указывает автор, даже при беглом просмотре лимниграмм можно установить, что как в с. Еленовке (лимниграммы 1, 2, 4 и 5), так и в с. Загалу, расположенном на противоположном конце озера (лимниграмма 7), наблюдаются сейши с периодом в 2 ч 04 мин. Это, по всей вероятности, продольная одноузловая сейша. В бухте Глаголь такой сейши подметить не удастся.

В чистом виде, как это видно из приводимых рисунков, одноузловая сейша почти не наблюдается. На нее обычно накладываются сейши с меньшими периодами и меньшими амплитудами — двухузловые, трехузловые и сейши с большим числом узлов. Наибольшая амплитуда, по данным Б. Д. Зайкова, наблюдается в с. Еленовка и достигает здесь 50 см.⁶ В с. Еленовке, кроме того, наблюдались сейши с периодами в 31 (лимниграмма 6) и 38 мин (лимниграмма 3), представляющие собой либо местные сейши отдельных бухт и заливов, либо четырехузловую продольную сейшу, период которой определен неточно. Амплитуда этой сейши 20—30 см.

В Арданышском заливе (бухта Глаголь) наиболее частые сейши с периодом около 30 мин (лимниграмма 11), но, кроме того, здесь наблюдались сейши с периодами в 49 (лимниграммы 12 и 13) и 57 мин (лимниграмма 14). Первые из них имеют небольшую амплитуду, у вторых она доходит до 25 см.

Сейши на оз. Севан, как отмечает Б. Д. Зайков, наблюдались в течение всего года. Вместе с тем наибольшие амплитуды сейш отмечались в теплое время года, в апреле—сентябре. Часто зарождение сейш было связано с прохождением гроз, которые, как уже отмечалось ранее, наиболее часты в мае—июне. Во многих случаях сейши вызывались сильными ветрами.

Сгоны и нагоны на оз. Севан выражены довольно слабо и водомерными наблюдениями почти не обнаруживаются. Поэтому можно предполагать, что периодические колебания водной массы оз. Севан не являются в большинстве случаев периодическими сгонно-нагонными колебаниями, а представляют собой свободные колебания, т. е. сейши.

Сложный характер записей на лентах самописцев уровня объясняется, по-видимому, возникновением на озере не только продольных сейш с различным числом узлов, но и поперечных, а также сейш, образующихся в отдельных бухтах и заливах. Определение периодов сейш путем теоретических расчетов подтвердили справедливость этого предположения.

Еще Л. С. Берг, пользуясь формулой Мериана, определил период одноузловой продольной сейши оз. Севан в 125 мин, или

⁶ Следует отметить, что Б. Д. Зайков, по-видимому, называет высоту волны амплитудой, и, следовательно, амплитуда одноузловой продольной сейши в с. Еленовка, т. е. максимальное отклонение уровня при сейше над уровнем при спокойном состоянии водной поверхности озера, равна 25 см.

в 2 ч 05 мин [3]. По расчетам, произведенным заново в настоящем исследовании, этот период оказался равным 124 мин, т. е. 2 ч 04 мин. Период одноузловой поперечной сейши, вычисленный для оси, проходящей поперек озера через Нижний Адиаман (ширина озера по этому поперечнику составляет 34,5 км), по формуле Мериана оказался равным 57 мин, т. е. совпадающим с тем периодом сейши, который наиболее часто наблюдается в бухте Глаголь, а эта последняя находится в непосредственной близости к поперечной оси озера и вблизи области пучностей этой сейши.

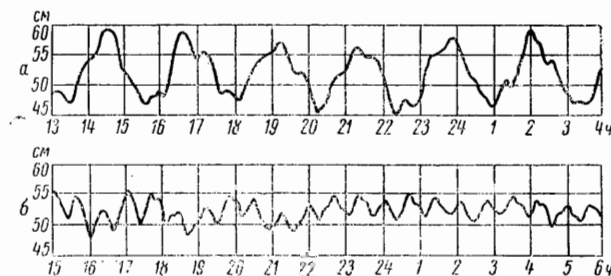


Рис. 32. Сейши оз. Севан по записи самописца уровня п-ва Севан.
а — за 23—24 II 1955 г.; б — за 25—26 VIII 1962 г.

Период одноузловой продольной сейши оз. Севан был вычислен еще двумя способами и оказался равным: по методу Дефанта—1 ч 55 мин, по методу Давыдова—1 ч 50 мин. От применения метода Кристалла к расчету сейш оз. Севан пришлось отказаться вследствие крайней сложности нормальной кривой этого озера.

Узловая линия, положение которой было определено по методу Дефанта, проходит несколько юго-западнее бухты Глаголь. Вот почему в этой бухте продольная одноузловая сейша почти не выражена.

Как известно, оз. Севан в настоящее время изменило свои очертания и глубины вследствие спуска вековых запасов озера через р. Зангу. Уже к 1962 г. уровень воды озера снизился на 15 м. Это снижение уровня обусловило изменение и длины и глубины озера. С достаточной степенью точности можно считать, что средняя глубина уменьшилась на 15 м, т. е. стала равной 26,3 м. Длина озера, судя по батиметрической карте оз. Севан, уменьшилась на 2,5 км. Изменения длины и глубины озера вызовут изменения в периодах сейш. Обозначим период одноузловой продольной сейши оз. Севан до спуска воды из озера через T_1 и период такой же сейши, но после спуска воды, через T_1' , аналогичным образом обозначим и

длину и глубину озера (среднюю) соответственно через L и L' , h и h' . Если принять для расчета сейш формулу Мериана, то отношение $T_1' : T_1 = \frac{L'}{L} \sqrt{\frac{h}{h'}}$. В соответствии с указанными выше изменениями длины и глубины озера это отношение будет равно $\frac{72,5}{75,0} \cdot \sqrt{\frac{41,3}{26,3}} = 1,18$. Таким образом, можно предполагать, что в изменившихся условиях период одноузловой продольной сейши $T_1' = 1,18$. $T_1 = 124 \cdot 1,18 \text{ мин} = 2 \text{ ч } 30 \text{ мин}$.

Управлением гидрометеорологической службы Армянской ССР 20 апреля 1947 г. был установлен самописец уровня типа «Валдай» у п-ва Севан, работающий по настоящее время. Ленты этого самописца за 1955 и 1956 гг. были подвергнуты обычной статистической обработке. На этих лентах были обнаружены сейши различного вида. Наиболее часто повторялась на этих лентах сейша с периодом в 2 ч 22 мин (среднее из 535 волн). Это продольная одноузловая сейша, хорошо заметная на лимниграмме, изображенной на рис. 32, а. Период ее в 1,16 раз больше периода такой же сейши, наблюдавшейся в первоначальный период.⁷ Напомним, что отношение величин этих двух периодов, вычисленное теоретически, равнялось 1,18.

Второе место по повторяемости на рассматриваемых лентах занимает сейша с периодом около 40 мин (233 волны). Это, по-видимому, сейша, соответствующая сейше с периодом 31—38 мин в первоначальный период наблюдений (рис. 32, б). Всего только 48 волн наблюдалось со средним периодом в 1 ч 25 мин. Возможно, что это поперечная одноузловая сейша.

Наконец, совсем редко, всего лишь 10 раз, была отмечена сейша с периодом около 10 мин, представляющая собой, по всей вероятности, сейшу местного происхождения.

⁷ Под первоначальным периодом подразумевается период до спуска вековых запасов вод озера через р. Зангу.

ГЛАВА VI

СЕЙШИ оз. БАЙКАЛ

Оз. Байкал — самое глубокое озеро в мире. Оно отличается исключительно хорошо выраженными сейшами, для которых характерен длительный промежуток времени затухания колебаний уровня. В отдельных случаях период затухания захватывает несколько суток.

Площадь водной поверхности озера 31 500 км², максимальная глубина 1741 м, средняя — 688 м. В плане озеро имеет серповидную вытянутую форму (рис. 33). По характеру рельефа дна озеро может быть разделено на три основные впадины: южную, среднюю и северную. Южная впадина занимает часть озера до устья р. Селенги. Рельеф дна этой впадины неоднороден: наблюдаются ложбины и неровности, имеются подводные кряжи, особенно резко выраженные на участке, преобладающем к дельте р. Селенги. Для южной впадины характерны крутые уклоны дна у западных и юго-западных берегов и сравнительно пологие у противоположных склонов.

Средняя впадина ограничена на юге Селенгинским мелководьем, на севере — подводным Академическим хребтом, проходящим от северной конечности о-ва Ольхон к Ушканьим о-вам и далее на север к м. Валукан. Значительная часть средней впадины отличается большими глубинами. Наибольшая глубина оз. Байкал находится как раз в средней впадине. Склоны дна в этой части озера крутые, в особенности у восточных берегов о-ва Ольхон и к востоку от Ушканьих о-вов.

Северная впадина расположена к северу от подводного Академического хребта и включает в себя так называемое Малое море. Впадина отличается исключительной ровностью дна с постепенным его понижением от южного конца Малого моря до района Котельниковского мыса. Восточный склон впадины пологий.

На Байкале насчитывается 27 островов. Часть из них тектонического происхождения и является выступом над водой подводного Академического хребта. Таковы, например, о-в Ольхон и группа Ушканьих о-вов. Остальные острова образовались в результате отчленения части суши от берега.

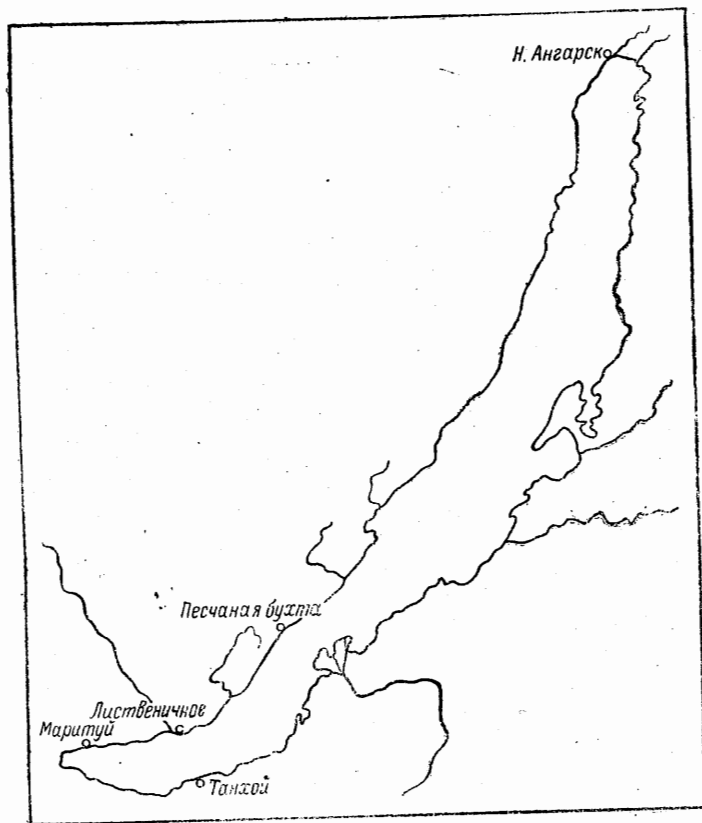


Рис. 33. Схема оз. Байкал с указанием мест установок самописцев уровня воды.

Влияние сложности рельефа дна оз. Байкал на образование и развитие сейш в значительной мере ослабляется большими глубинами озера.

Изучение сейш Байкала началось давно. Оно включало в себя регистрацию уровня при помощи самописцев, обработку лент этих самописцев, расчеты периодов сейш различными способами и, наконец, исследование сейш на модели озера.

На Байкале в разное время действовало 6 самописцев уровня: 1) в Песчаной бухте (с 1908 г. по настоящее время); 2) в пос.

Лиственничном — Байкальская лимнологическая станция, ныне Байкальский лимнологический институт (с 1925 г. по настоящее время); 3) у истока р. Ангары — гидрометеорологическая станция Западно-Сибирского управления гидрометеорологической службы (с 1951 г. по настоящее время); 4) в Маритуйе (1913—1918 гг.); 5) в Танхое (1943—1954 гг.); 6) в Н. Ангарске (1930—1933 гг.). Материалы наблюдений последнего пункта разыскать, к сожалению, не удалось. Места установок всех самописцев уровня показаны на рис. 33.

Как видно из приведенных данных, наиболее длительным периодом отличаются наблюдения в Песчаной бухте и в пос. Лиственничном. Следует, однако, заметить, что часто записи самописца уровня в Песчаной бухте приходилось браковать вследствие неисправности прибора либо вследствие плохого ухода за ним.

Имеются сведения о том, что в июле 1925 г. Б. Н. Яснитским были произведены наблюдения над сейшми на о-ве Ольхон (маяк Кобыльа голова). К сожалению, материалов этих наблюдений разыскать не удалось. Сведения о них имеются лишь в виде краткого упоминания и сообщения о том, что В. Н. Яснитским с 1-го по 9-е июля 1925 г. наблюдалась серия двухузловых сейш с амплитудой до 11 см [48].

Таким образом, если не считать данных Б. Н. Яснитского, наблюдения над сейшми фактически производились лишь в южной части оз. Байкал. Задача ближайшего будущего — установить самописцы, лучше всего типа «Валдай», на обоих берегах средней и северной частях озера.

Первые сведения о сейшах оз. Байкал можно обнаружить у Хальбфасса [67], причем сведения эти носят совершенно фантастический характер. Хальбфассом даются следующие величины периодов сейш оз. Байкал: 720; 231,2; 72,6; 31,9 и 30 мин. Как это будет показано далее, эти данные вовсе не соответствуют действительности. В дальнейшем в зарубежной литературе неоднократно встречаются упоминания об одноузловой продольной сейше оз. Байкал.

В 1926 г. в Трудах Иркутской магнитной и метеорологической обсерватории были опубликованы статьи В. Н. Соловьева и В. Б. Шостаковича [48] и Т. П. Кравеца и В. Н. Соловьева [27]. Первая из них представляет собой исследование сейш оз. Байкал, основанное на обработке лент самописцев уровня в Песчаной бухте (1908—1925 гг.) и в Маритуйе (1913—1918 гг.), вторая — реферат работы В. Н. Соловьева [47], посвященной исследованиям сейш оз. Байкал на модели.

О температурных сейшах оз. Байкал (поперечных внутренних волнах) приводятся сведения в докладе на III Всесоюзном гидрологическом съезде В. И. Верболова [6].

В трудах Байкальской лимнологической станции АН СССР в 1960 г. была опубликована статья Т. П. Кравеца [26], напи-

санная им еще в 1941 г. Статья посвящена рассмотрению передвижения сейш оз. Байкал по Ангаре.

В настоящей работе использованы данные В. Н. Соловьева и В. Б. Шостаковича и дополнены результатами обработки материалов за последующие годы по записям самописца в Песчаной бухте, в пос. Лиственичном и в истоке р. Ангары.

Следует признать выбор места для установки самописца уровня в Песчаной бухте не совсем удачным, так как, по-видимому, через эту бухту или вблизи от нее проходят узловые линии сейш с четным числом узлов. Поэтому на лентах самописца уровня в этом пункте трудно обнаружить сейши с числом узлов более двух, хотя одноузловые продольные сейши здесь хорошо выражены.

Значительную помощь в анализе лент самописцев уровня оказывают результаты исследований В. Н. Соловьева на модели оз. Байкал. Уже по одному этому исследования В. Н. Соловьева представляют большой интерес.

Модель озера была изготовлена из цемента таким образом, что искажение масштабов составляло: вертикального 1:10973, горизонтального 1:586000. Деревянной лопаточкой в модели возбуждались сейши. Колебания уровня регистрировались специально сконструированным самописцем.

Автором была разработана формула для перехода от периода сейши, наблюдавшейся на модели, к периоду той же сейши в естественных условиях. Формула эта приводилась ранее (см. стр. 102).

В результате тщательно проведенных опытов В. Н. Соловьев получил весьма интересные результаты, характеризующие периоды сейш с различным числом узлов и расположение узловых линий в озере (рис. 34).

В табл. 18 приводятся результативные данные В. Н. Соловьева относительно периодов сейш с различным числом узлов (до 5 включительно).

В первом столбце T_i' обозначает продолжительность периода сейши с i узлами ($i = 1, 2, \dots, 5$), определенный по опыту на модели; δ — декремент затухания уровня на модели; T_i — период сейши с i узлами, приведенный к естественным условиям по формуле В. Н. Соловьева.

В. Н. Соловьевым были вычислены периоды сейш оз. Байкал с различным числом узлов по формуле Мериана. Полученные данные значительно отличаются от величин периодов, установленных в результате опытов на модели. Так, например, период одноузловой продольной сейши по Мериану составляет 5 ч 26 мин, а по модели — 4 ч 56 мин; для двухузловой сейши периоды получились соответственно равными: по Мериану 2 ч 40 мин, по модели 2 ч 33 мин.

Соловьев показал, кроме того, что если для одноузловых и двухузловых сейш величины отношений между периодами этих

сейш, как вычисленными по формуле Мериана, так и определенными в результате опытов на модели, мало отличаются друг от друга, то по мере увеличения числа узлов различия между этими отношениями становятся значительными:

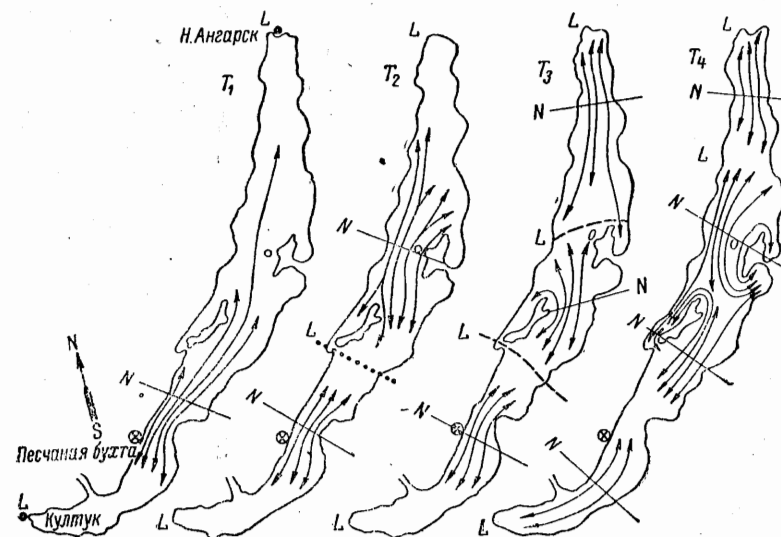


Рис. 34. Расположение узловых линий на оз. Байкал для одноузловой (T_1), двухузловой (T_2), трехузловой (T_3) и четырехузловой (T_4) сейш (по В. Н. Соловьеву).
L — пучность; N — узел.

Исследования Соловьева обнаружили еще некоторые интересные особенности байкальских сейш. Оказалось, что амплитуды уровня в различных пучностях неодинаковы. Причина этого, как совершенно правильно он указывал, заключается в неравномерности распределения узловых линий. Можно найти вероятные различия в амплитудах сейш в различных пунктах.

Таблица 18
Данные опытов В. Н. Соловьева на модели оз. Байкал

T	T_i' , сек	δ	T_i , ч мин
T_1	3,436	0,440	4 56
T_2	1,710	0,152	2 33
T_3	1,033	0,213	1 30
T_4	0,709	0,36	0 59
T_5	0,516	0,12	0 42

В самом деле, если обозначить площадь водной поверхности озера между его концом и первой узловой линией через V_1 и остальную часть водной поверхности водоема через V_2 и если в первом приближении принять узловую линию за прямую, то можно записать следующее равенство:

$$\frac{1}{2}H_1V_1 = \frac{1}{2}H_2V_2. \quad (6,1)$$

В этом равенстве H_1 и H_2 — амплитуды на одном и на другом концах озера, т. е. там, где наблюдаются при одноузловой сейше пучности. Равенство это основано на том, что количество воды, прошедшее через поперечное сечение узловой линии, вследствие понижения уровня в одном конце озера затем распределяется по другую сторону узловой линии и вызывает соответствующее повышение уровня в этой части водоема.

Из равенства (6,1) следует, что $H_1:H_2 = V_2:V_1$, или $H_1:H_2 = \frac{1}{V_1}:\frac{1}{V_2}$. Полученные соотношения можно распространить на сейши с любым числом узлов:

$$H_1:H_2:H_3:\dots:H_n = \frac{1}{V_1}:\frac{1}{V_2}:\frac{1}{V_3}:\dots:\frac{1}{V_n}.$$

Основываясь на этих соотношениях, была составлена таблица, в которой показано соотношение между амплитудами сейш с любым числом узлов в Култуке, Ольхонских воротах и в Н. Ангарске. При составлении этой таблицы амплитуда сейши с любым числом узлов в Култуке была принята за 100. В табл. 19 помещены соответствующие данные для одноузловой, двухузловой и трехузловой сейш.

В упомянутой выше статье В. Н. Соловьева и В. Б. Шостаковича [48] приводятся также данные фактических наблюдений над сейшами оз. Байкал.

В результате обработки лент самописцев, установленных в Песчаной бухте и в Маритуе, были обнаружены сейши всех пяти периодов, найденных на модели оз. Байкал Соловьевым. Чаще всего и с наибольшей амплитудой наблюдались одноузловые продольные сейши. Эти сейши отличаются поразительной правильностью, какой, пожалуй, не наблюдается ни на одном озере земного шара (рис. 35, а).

Таблица 19

Вероятные соотношения между амплитудами сейш с различным числом узлов в Култуке, Ольхонских воротах и Н. Ангарске

T	Кулук	Ольхонские ворота	Н. Ангарск
T_1	100	0	25
T_2	100	200	160
T_3	100	230	530

Одноузловая продольная сейша заметна на лентах самописцев почти ежедневно. Реже и с меньшей амплитудой, по мнению упомянутых авторов, наблюдаются сейши четырехузловые, которые, как отмечают В. Н. Соловьев и В. Б. Шостакович, в сочетании с одноузловой сейшей дают типичную для байкальских сейш кривую. На рис. 35, б изображена запись колебаний уровня такой сейши. На ней отчетливо видны и продольная одноузловая сейша с периодом около 4 ч 38 мин и четырехузловая, по-

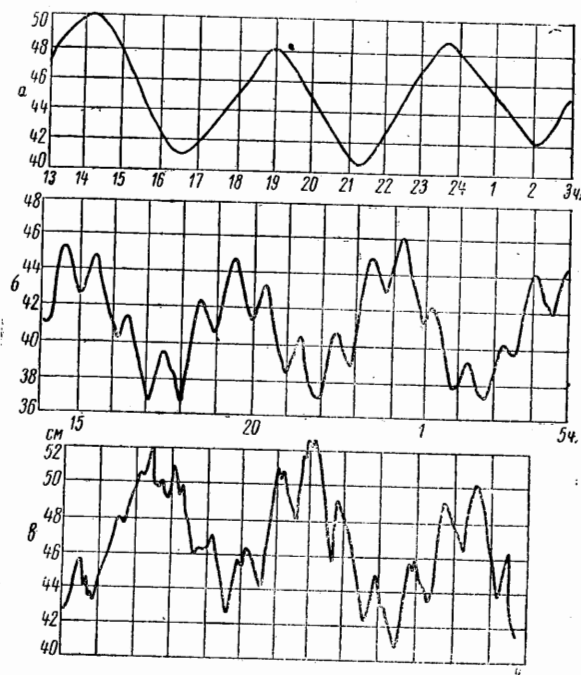


Рис. 35. Сейши оз. Байкал по записям самописцев уровня воды.
а — в пос. Лиственничном за 19–20 VI 1959 г.; б — в Песчаной бухте за 15–16 IV 1950 г.; в — в Песчаной бухте за 12 IV 1950 г.

видимому, продольная сейша с периодом около 1 ч. Аналогичный характер носит лимниграмма самописца уровня в Песчаной бухте за 12 апреля 1950 г. На этой лимниграмме, помимо одноузловой и четырехузловой сейш, можно в отдельные промежутки времени заметить пятиузловую сейшу с периодом около 44 мин (см. рис. 35, в). В табл. 20, заимствованной у В. Н. Соловьева и В. Б. Шостаковича, приведены сводные данные о периодах сейш оз. Байкал, полученных в результате опытов на модели и обработки лимниграмм самописцев уровня в Песчаной бухте и в Маритуе. В этой же таблице приводятся данные о максимальных амплитудах сейш в тех же пунктах.

Таблица 20

Периоды и амплитуды сейш оз. Байкал в Маритусе и в Песчаной бухте, по данным В. Н. Соловьева и Б. В. Шостаковича

T	Период по		Максимальная амплитуда, см	
	модели, ч мин	наблюдениям, ч мин	Маритуй	Песчаная бухта
T_1	4 56	4 38,4	14	12
T_2	2 33	2 33	3	<1
T_3	1 30	1 27,7	0,5	<1
T_4	0 59	1 00	2	1
T_5	0 43	0 44	1	0

Нужно иметь в виду, как на это совершенно правильно указывают В. Н. Соловьев и Б. В. Шостакович, приведенные данные относятся только к южной части Байкала.

Основываясь на соображениях относительно амплитуд сейш и на формуле (6, 1), можно предполагать, что наибольшие амплитуды одноузловой продольной сейши в северной части должны быть значительно меньше, чем в южной, так как узловая линия этой сейши делит площадь водной поверхности на две части, сильно отличающиеся по размерам друг от друга (см. рис. 34).

Материалы наблюдений, как подметили упомянутые выше авторы, показывают по существу отсутствие годового хода повторяемости сейш, в особенности одноузловых.

В дополнение к тем данным, которые были заимствованы в работе цитированных авторов, в настоящем исследовании была произведена обработка материалов записей самописцев уровня, установленных в Песчаной бухте, на Байкальской лимнологической станции АН СССР (пос. Лиственичный) и на гидрометеорологической станции Восточно-Сибирского управления гидрометеорологической службы в истоках р. Ангары. Обработка носила стандартный характер. Прежде всего, по методу Бюи-Балло определялся период одноузловой сейши. Примером может служить такого рода обработка, произведенная по ленте самописца уровня Байкальской лимнологической станции АН СССР за 1—2 июля 1951 г. С ленты за эти дни были сняты уровни через каждые 5 мин и определены величины размахов сумм уровней, как об этом рассказано выше.

Расчеты были произведены для различных предполагаемых периодов сейши. По полученным данным был построен график изменений величин размаха уровня в зависимости от продолжительности периода (см. рис. 2). Такой обработке были подвергнуты несколько лент самописца уровня в пос. Лиственичном и в

Песчаной бухте. Во всех случаях период одноузловой сейши оказывался равным 4 ч 36 мин.

Затем период сейш был определен статистическим методом по записям самописцев в пос. Лиственичном, Песчаной бухте, на гидрометеорологической станции у истока р. Ангары. Результаты получились следующие: средний период одноузловой сейши по данным в пос. Лиственичном оказался равным 4 ч 39,0 мин (среднее из 1717 волн), в Песчаной бухте — 4 ч 36,2 мин (307 волн), у истока р. Ангары — 4 ч 35 мин (среднее из 147 волн).

Значительно реже встречаются волны с периодом около 60 и 30 мин. Первый из этих периодов, по-видимому, — период четырехузловой продольной сейши, второй — период сейши местного происхождения.

Годовой ход повторяемости сейш почти не выражен. Надлежит отметить, что ледяной покров не является препятствием для возникновения сейш. Амплитуды сейш с любым числом узлов невелики и даже для одноузловой продольной сейши, у которой всегда амплитуда наибольшая, последняя не превышает 20 см. В подавляющем же большинстве случаев преобладают амплитуды порядка 5—8 см.

Наконец, были произведены расчеты периодов одноузловой продольной сейши тремя способами — методом Дефанта, Давыдова и импедансов. По Дефанту T_1 оказался равным 4,4 ч, по методу Давыдова — 4 ч и по методу импедансов — 4,3 ч. От применения метода Кристалла пришлось отказаться по причине сложности нормальной кривой.

При сравнении всех полученных данных о величине периода одноузловой сейши за истинный период был принят период, полученный по фактическим данным и равный 4 ч 38 мин.

Каковы же причины возникновения сейш и какие явления — сейши или сейшеобразные колебания — преобладают на Байкале?

Анализ большого числа лент самописцев уровня, установленных в южной части озера, данные о сгонах и нагонах, приведенные в статье Б. А. Помыткина [41], позволяют прийти к выводу о решительном преобладании сейш над сейшеобразными колебаниями уровня на оз. Байкал. В самом деле, как уже отмечалось, сейши здесь отличаются, как правило, значительной длительностью и правильностью очертаний на лентах самописцев уровня. Кроме того, на лентах самописцев обычно сгоны и нагоны выражены довольно слабо. Наконец, повторяемость сгонов и нагонов очень невелика. Так, по данным Б. А. Помыткина, за период 1949—1953 гг. (5 лет) у пос. Лиственичного нагоны были отмечены в среднем 23 раза в год, а сгоны — 36 раз, между тем как периодические колебания уровня на том же посту самописцем уровня фиксируются почти каждый день.

Явления сгонов и нагонов на Байкале, так же как и на дру-

гих озерах, связаны с воздействием ветра на водную массу озера. При всех случаях сгонов и нагонов, отмеченных Помяткиным, имели место сильные ветры, иногда со скоростью до 22 м/сек. Сгоны здесь (в пос. Лиственичном) вызываются ветрами преимущественно юго-западного, северо-западного и северного направления, нагоны — ветрами северо-восточных, восточных и юго-юго-восточных румбов. Эти ветры обусловлены общими синоптическими процессами на больших территориях.

Все изложенное выше заставляет предполагать, что формирование сейш на оз. Байкал бывает связано главным образом с изменением атмосферного давления, с прохождением центров пониженного или повышенного давления над озером. Эти процессы вызывают появление динамического уровня, а за этим неизбежно следует возникновение сейш.

В заключение следует отметить, что еще в 1926 г. Б. В. Шостакович обратил внимание на существование внутренних сейш в оз. Байкал. Эти предположения впоследствии были подтверждены Б. Л. Дзердзеевским. По мнению Шостаковича, на оз. Байкал существует внутренняя сейша с периодом 38 суток. Позже Л. Л. Россолимо [45] подверг критике выводы Шостаковича и высказал сомнение в их обоснованности. Мортимер [76] рассчитал теоретически период внутренней сейши для Байкала и получил этот период равным 73 суткам, т. е. величину почти вдвое большую, чем у Шостаковича. В. И. Верболов [6] высказывает предположение о возможности существования двухузловой внутренней сейши на оз. Байкал. В своем докладе на III Всесоюзном гидрологическом съезде В. И. Верболов, основываясь на исследованиях на оз. Байкал зимой 1956 и летом 1956 и 1957 гг. в приангарском районе, сообщает, что он обнаружил две внутренние сейши — одну с периодом в 5—6 суток (поперечную) и другую с периодом в 10—12 суток. Вычисленный по формуле Ватсона период внутренней сейши (поперечной) оказался, по данным В. И. Верболова, равным 5—6 суткам. Природа внутренней сейши с периодом в 10—12 суток осталась невыясненной.

По сообщениям того же автора, непрерывные наблюдения на разрезе Лиственичный — Танхой (летом 1955 г.) и длительные рейдовые станции летом 1956 и 1957 гг. выявили, что изотермы в слое 0—50 м колеблются с периодом около 15 ч.

Внутренние сейши до сих пор, как это видно из изложенного, изучены весьма слабо. Исследование их является неотложной задачей ближайшего будущего. Кроме того, совершенно очевидно, что для получения более полного представления о сейшах оз. Байкал необходимо установить самописцы уровня в северной оконечности озера и в центральной его части, по обоим берегам.

ГЛАВА VII

СЕЙШИ оз. ИССЫК-КУЛЬ

Оз. Иссык-Куль — одно из крупнейших горных озер мира. Оно расположено на высоте 1623 м над уровнем моря. Длина озера 182 км, максимальная ширина 58 км. Площадь водной поверхности озера 6206 км². Максимальная глубина 702 м, средняя — 279 м.

Озеро занимает тектоническую котловину, окруженную высокими горными хребтами: с севера Кунгей-Алатау, с юга Терской-Алатау. На западе и востоке котловину замыкают отроги этих хребтов. Непосредственно к озеру примыкает равнинная полоса, расширяющаяся на восточном побережье. Западная часть котловины соединяется через Боамское ущелье с Чуйской долиной. Через это ущелье прорываются воздушные массы западного переноса, в результате чего над западной частью озера господствуют ветры западного направления, скорости которых достигают 24—40 м/сек.

Береговая линия оз. Иссык-Куль сравнительно мало изрезана. Имеются два крупных узких залива на восточном побережье в устьях рр. Тюп и Джаргалан. Джаргаланский залив, длиной 17 км и шириной более 1 км, имеет довольно ровную береговую линию и вытянут с запада на восток. Наибольшая глубина залива около 50 м. Южный и северный берега озера образуют многочисленные, но сравнительно небольшие, открытые бухты шириной от 0,5 до 1,3 км. Южный берег более изрезан, чем северный (рис. 36).

Наибольшие глубины сосредоточены в центральной части озера. Область максимальных глубин, превышающих 600 м и занимающих около 21% всей площади озера, несколько смещена к югу. От центральной части озера глубины медленно уменьшаются на запад и на восток. Западная часть озера наиболее мелководна. Здесь озеро сужается, образуя как бы самостоятельный водоем, мелководный, с глубинами не более 50 м.

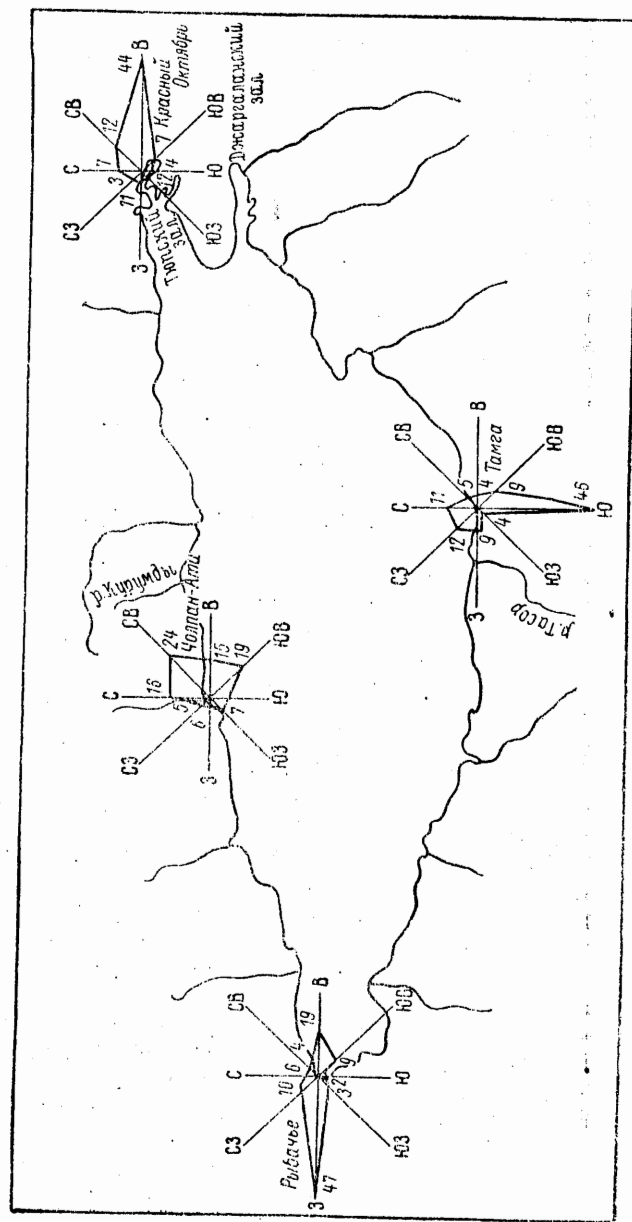


Рис. 36. Схема оз. Иссык-Куль с указанием повторяемости и направления ветра в среднем за год по четырем метеорологическим станциям.

Годовые изменения уровня озера характеризуются растянутым весенне-летним подъемом и низким стоянием уровня в предвесенний и осенне-зимний периоды. Абсолютная амплитуда колебаний уровня достигает 1,2 м.

Озеро очень бурно. Волны высотой 2—2,5 м — довольно частое явление. По свидетельству местных рыбаков и работников водного транспорта, высота ветровых голи достигает и больших размеров. На большую повторяемость на озере крупного волнения под влиянием сильных ветров указывает и В. П. Матвеев [36], зарегистрировавший волну высотой до 3,5 м. Нередко под влиянием ветров различных направлений в разных концах озера волны от одного направления ветра перекрываются волнами от ветра другого направления.

На западном и в меньшей степени на восточном побережьях озера часто наблюдаются сгонно-нагонные явления. Особой силы сгоны и нагоны достигают на мелководном западном участке в г. Рыбачьем. Сгоны на западном побережье чаще всего являются следствием западных ветров, на восточном — восточных.

Несмотря на то, что во все сезоны года в верхних слоях атмосферы над иссык-кульской котловиной господствуют западные ветры, в нижних слоях воздуха в котловине озера направление господствующих ветров разнообразно. Здесь развиты горнодолинные ветры и бризы. В холодное время суток дует ветер с гор («горняк»), в теплое — с озера на сушу («морской»). Таким образом, в каждом пункте на побережье наблюдаются два преобладающих, противоположных по направлению, ветра, перпендикулярных к береговой линии и к протяжению горных хребтов. Так, в г. Рыбачьем господствуют западные и восточные ветры. Западные, носящие местное название «улан», преобладают. Повторяемость ветров в среднем за год по данным четырех метеорологических станций показана на рис. 36.

На ст. Рыбачье ветры наибольшей повторяемости отличаются и наибольшими скоростями. То же наблюдается и на ст. Красный Октябрь. В районе этих станций ветры, дующие с суши на озеро, обладают большой силой. Здесь (на западном и восточном берегах озера) эти ветры прорываются через глубокое Боамское устье на западе и через перевал Сын-Тас на востоке. Большой силы западный ветер улан достигает в г. Рыбачьем (до 40 м/сек). Нередки случаи, когда этот ветер пронесится через все озеро и регистрируется на метеорологических ст. Тамга, Койсары, Чолпан-Ата. Продолжительность улана колеблется от нескольких часов до двух-трех суток. Усилению ветра в г. Рыбачьем предшествует падение давления, а с возникновением сильного ветра давление увеличивается. Наиболее сильны западные ветры в апреле—мае.

Восточные ветры более слабые и обычно до западного

побережья не доходят. Западные и восточные ветры, встречаясь в срединной части озера, образуют иногда смерчи.

Предположение о существовании сейш на оз. Иссык-Куль впервые высказал Л. С. Берг [2], основываясь на правильной форме котловины озера. Местные жители подтверждают существование периодических колебаний уровня в течение суток с размахом 10—15 см. Впервые наблюдения над сейшами на оз. Иссык-Куль были проведены инж. Г. П. Попченко в январе 1932 г. у пристани Каракол (ныне Пржевальск). Наблюдения заключались в отсчетах по рейке через каждые 5 мин. Зарегистрированная сейша показана на рис. 37. Высота ее составила 39 см, период оказался равным 1 ч 20 мин.

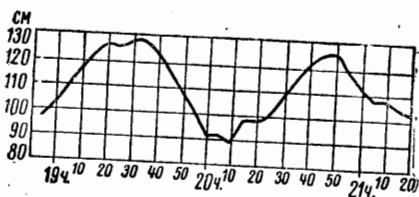


Рис. 37. Сейши оз. Иссык-Куль у пристани Каракол (Пржевальск) за 30 I 1932 г. (по данным Г. П. Попченко).

В день наблюдений над восточной частью озера дул сильный восточный ветер (горняк).

В 1930 г. на озере экспедицией ГГИ был впервые установлен лимниграф у пристани Сухой хребет. Но он был поврежден и лимни-

граммы не сохранились. В 1944 г. самописец уровня был установлен в г. Рыбачьем. Но, к сожалению, лимниграммы этого самописца, очевидно, также утрачены, а так как они не были обработаны, то и в литературе нет никаких сведений о результатах работы этого самописца.

В настоящее время, начиная с 1958 г., на оз. Иссык-Куль функционируют самописцы уровня типа «Валдай», установленные Управлением гидрометеорологической службы Киргизской ССР в г. Рыбачьем и в пос. Чолпан-Ата. Некоторое время производились наблюдения над колебанием уровня при помощи самописца на гидрометеорологической ст. Койсары в Джаргаланском заливе озера. Лимниграммы этих самописцев уровня просмотрены и проанализированы: по ст. Чолпан-Ата и Рыбачье — за период с января 1958 по август 1960 г., по ст. Койсары — за время январь, 26 июня — 12 октября 1958 г., 20 января — 31 марта 1959 г.

Просмотр и анализ этих лимниграмм позволяет прийти к заключению, что сейши на оз. Иссык-Куль — явление частое. Отчетливо заметны они у западного и восточного побережья озера, в частности у мелководного западного участка в г. Рыбачьем и в Джаргаланском заливе в пос. Койсары. У северного побережья в пос. Чолпан-Ата сейши не обнаруживаются. Проведенные в июле 1960 г. наблюдения, организованные сотрудниками кафедры гидрологии суши географического факультета ЛГУ, на противоположном берегу озера, вблизи

санатория Тамга (южный берег), также не обнаружили сейш. Вероятнее всего, самописцы уровня на концах поперечной оси озера в обоих случаях попали в зону узловой линии основной продольной сейши озера; в этой зоне сейши не должны проявляться. К сказанному нужно добавить, что самописец уровня «Валдай», установленный в пос. Чолпан-Ата, имеет малый вертикальный масштаб и все небольшие колебания уровня на лентах самописца затушевываются.

Обработке были подвергнуты лимниграммы самописцев в г. Рыбачьем и в пос. Койсары. Методика обработки была принята обычная и описанная в гл. I первой части (стр. 9). Предварительно был рассчитан период одноузловой продольной сейши по формуле Мериана. Период этой сейши оказался равным 1 ч 56 мин.

При просмотре лент самописца в г. Рыбачьем за 1958 г. были отобраны 27 серий одноузловых сейш, наиболее отчетливо выраженных на лентах. Значительная часть их приходилась на март и октябрь. Наблюдались хорошо выраженные периодические колебания и в апреле, мае, июле, августе и сентябре. В другие месяцы сейши также наблюдались, но их было трудно выделить на лимниграммах вследствие интерференции сейш с различными периодами. Помимо этого, в отдельные дни и даже декады лимниграммы были низкого качества вследствие неудовлетворительной работы самописца: труба, соединяющая озеро с колодцем, в котором установлен самописец, периодически заиливалась.

Наиболее длительные серии сейш и сейшеобразных колебаний в 1958 г. были зарегистрированы 19—20 марта, 16—19 апреля, 7—10 мая, 17—19 июля и 2—4 октября. Эти серии в течение промежутков времени от 40 до 65 ч включали в себя от 20 до 35 волн примерно одного и того же периода. Средний период сейши во всех 5 случаях оказался равным 1 ч 56 мин.

По наблюдениям 1959 г. в г. Рыбачьем были выбраны 11 серий одноузловых сейш, а за 1960 г. — три серии. Средний период сейши по данным за 1959 и 1960 гг. также оказался равным 1 ч 56 мин. Из наиболее длительных по числу волн сейш, следующих одна за другой, является серия, включающая в себя 36 волн, со средним периодом в 1 ч 55 мин. Зарегистрированы эти колебания 13—16 июня 1959 г.

Таким образом, обработка лент самописцев и расчет по формуле Мериана дают одну и ту же величину периода сейши, равную 1 ч 56 мин. Сейша эта, очевидно, одноузловая продольная. Величина периода этой сейши, вычисленная по отдельным сериям, довольно устойчива. Отклонения от среднего значения периода в 1 ч 56 мин не превышают ± 9 мин, причем эти крайние отклонения приходятся на случаи с малым числом сейш в выбранной серии (меньше 4).

Средняя высота одноузловой продольной сейши оз. Иссык-

Куль, вычисленная за рассматриваемый период, равна 6—7 см. Максимальный размах сейш за 1958—1959 гг., составлял 22—23 см.

В Джаргаланском заливе у восточного побережья озера в районе курорта Койсары сейши наблюдаются так же часто,

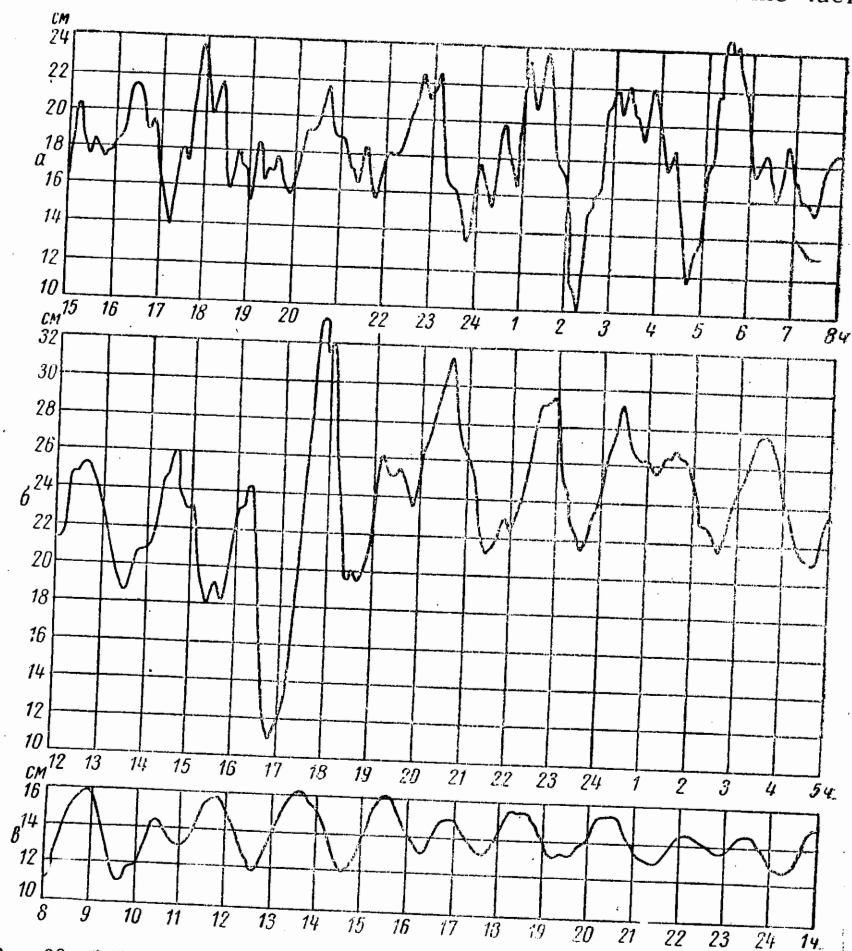


Рис. 38. Сейши оз. Иссык-Куль по записи самописца уровня в Джаргаланском заливе.

а — за 1—2 III 1955 г.; б — за 15—16 IX 1958 г.; в — за 2—1 III 1959 г.

как и у западного побережья. Записи на лентах самописца здесь носят сложный характер, по-видимому, вследствие интерференции волн различных периодов. Примеры таких записей показаны на рис. 38, а, б. Иногда на лентах самописца здесь можно проследить и более простые периодические колебания

с периодом, близким к периоду одноузловой продольной сейши. (рис. 38, в).

Из использованных лент самописца в курорте Койсары были выбраны 8 серий продольной одноузловой сейши в 1958 г. и 4 серии в 1959 г. Средний период одноузловой сейши оказался равным 1 ч 38 мин. Сейши такого периода были дважды (25—26 и 28—29 июля 1960 г.) зарегистрированы в Джаргаланском заливе гидрологами ЛГУ, установившими здесь на короткое время самописец уровня. Наблюдения проводились старшей лаборанткой кафедры гидрологии суши Л. Н. Дубровиной с 23 июля по 3 августа 1960 г. Во время этих наблюдений были зарегистрированы сейши и меньшего периода — 1 ч 21 мин. Следует напомнить, что сейша с периодом 1 ч 20 мин была уже известна по данным наблюдений Попченко в 1932 г. у пристани в Пржевальске. По всей вероятности, это сейша местного происхождения.

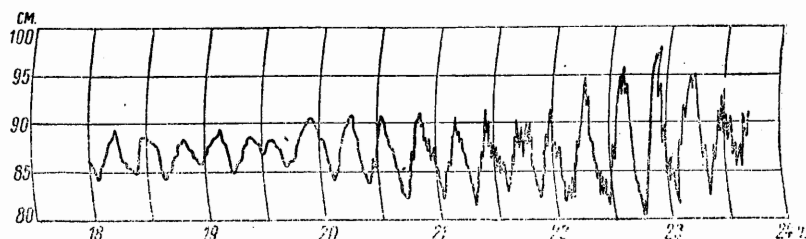


Рис. 39. Сейши оз. Иссык-Куль в районе пос. Чолпан-Ата за 20 VII 1960 г.

Двухузловая продольная сейша также наблюдается на оз. Иссык-Куль, но значительно реже, чем одноузловая. В чистом виде ее удалось выделить на лентах самописца в г. Рыбачьем несколько раз. Средний период этой сейши равен 52 мин. В сложных колебаниях она является одной из составляющих. Такого рода колебания, вызванные резким усилением ветра, предшествуют иногда развитию одноузловой продольной сейши (см. рис. 40, б).

Сейши с более малыми периодами прослеживаются на северном побережье озера в районе пос. Чолпан-Ата. Так, на лимниграммах самописца в этом пункте за 14—15 июля 1959 г. можно выделить сейши с периодом 18—20 мин. Такие же колебания уровня в данном пункте зарегистрированы самописцем с записями в более крупном масштабе специальными наблюдениями ЛГУ 20 июля 1960 г. (рис. 39).

Для уточнения величины периода одноузловой продольной сейши оз. Иссык-Куль последний был определен путем обработки нескольких лент самописцев уровня у г. Рыбачье и у курорта Койсары по методу Бюи-Балло, сущность которого изложена

на стр. 9. Результаты такой обработки приведены в табл. 21. Сравнение результатов обработки, приведенных в таблице, позволяет принять период одноузловой продольной сейши, регистрируемый в западном заливе озера у г. Рыбачье, равным 1 ч 50 мин, а в Джаргаланском заливе — 1 ч 36 мин.

Таблица 21

Периоды одноузловой продольной сейши оз. Иссык-Куль, рассчитанные по методу Бюи-Балло

Дата	Период	
	средний по лентам, ч мин	по методу Бюи-Балло, ч мин
г. Рыбачье		
1958 г.		
19—20 III	1 56	1 48
30—31 VIII	1 56	1 52,5
1960 г.		
6—7 VII	1 56,5	1 48
21—22 VII	1 55	1 52,5
Курорт Койсары		
26—27 VI 1958 г.	1 34,5	1 32
25—26 VII 1960 г.	1 39	1 40

Расчеты периодов одноузловой и двухузловой продольных сейш были произведены также теоретическими способами: по формуле Мериана, по способу Давыдова, по методу импедансов. Положение узловых линий было определено по методам Давыдова и Дефанта. Результаты расчетов приведены в табл. 22.

Таблица 22

Результаты расчетов теоретическими методами периодов одноузловой и двухузловой продольных сейш и положения их узловых линий для оз. Иссык-Куль

Метод расчета	Периоды сейш		Положение узловых линий (км) от западного края озера	
	одноузловой, ч мин	двухузловой, ч мин	при одноузловой	при двухузловой
	ч мин	ч мин		
По Мериану	1 56	0 56	—	—
По Давыдову	1 33,3	0 42	93	63 и 121
По способу импедансов	1 38	—	—	—
По Дефанту	2 07	—	91	—

Периоды одноузловой сейши, вычисленные различными методами, оказались близкими к наблюдаемым у г. Рыбачье (метод

Мериана, Дефанта) и Джаргаланском заливе (метод импедансов, Давыдова).

Узловая линия продольной одноузловой сейши, положение которой было определено по способу Давыдова, оказалась расположенной в 93 км от западного конца озера, считая по оси его. Она пересекает южный берег озера между устьями рек Тамги и Тасор и северный берег между бухтами Курумда и Чолпан-Ата. Таким образом, узловая линия находится в непосредственной близости к бухтам Тамга и Чолпан-Ата; предположение, высказанное ранее относительно положения узловой линии в этом районе озера, оказалось верным.

Узловые линии двухузловой продольной сейши по данным расчета находятся на расстоянии 63 и 121 км от западного конца озера, считая по его оси.

Поперечная сейша с периодом по формуле Мериана в 37 мин на оз. Иссык-Куль в чистом виде не проявляется. Очевидно, для ее развития нет достаточных причин, так как направление господствующих ветров значительной силы над озером совпадает с продольной осью его, а разность атмосферного давления между южным и северным берегом незначительна.

Причины возникновения сейш на оз. Иссык-Куль не изучены. Просмотр лент самописцев уровня наводит на мысль, что причиной образования сейш могут быть сгонно-нагонные явления. Однако более детальное знакомство с записями самописцев уровня и ветровым режимом приводит к заключению, что далеко не после каждого сгона или нагона возникают сейши. В г. Рыбачье основной причиной сейш, так же как и сгонов, является сильный западный ветер. Если этот ветер, дующий в течение нескольких часов, вызывает у западного побережья озера сгон тех или иных размеров, то сейши могут возникнуть под воздействием ветра этого направления в сочетании с относительно большим изменением давления воздуха над озером. Сказанное отчетливо иллюстрируется положением уровня поверхности озера 27—31 августа 1958 г. у г. Рыбачье (рис. 40). Здесь 27, 28 и 29 августа сгоны наблюдались в дневные часы. Во всех трех случаях эти сгоны являлись следствием западных ветров, дующих в послеполуденные часы со скоростью 8—12 м/сек и регистрируемые в вечерние и ночные сроки наблюдений (19 ч и 1 ч). К вечеру 27 и 28 августа ветер менял направление и к ночи стихал. Уровень воды озера под действием западного ветра постепенно понижался и после его прекращения плавно восстанавливал свое первоначальное положение к концу суток. Атмосферное давление в эти дни над озером понизилось, достигнув минимума к 13 ч 29 августа.

В этот день сгон развивался иначе. Падение уровня, вызванное теми же причинами, сопровождалось колебаниями сначала с периодом 53—55 мин, а затем с большим периодом, равным 1 ч 56 мин. Судя по величинам этих периодов, первые волны

колебаний надлежит отнести к двухузловой, вторые — к одноузловой продольной сейше. Западный ветер в течение суток с 19 ч 29 августа до 19 ч 30 августа не менял своего направления и не имел достаточной силы (5—10 м/сек). Атмосферное давление за это же время понизилось приблизительно на 5 ммб. Разность между величинами давления у западного побережья (г. Рыбачье) и у восточного (пос. Койсары) также увеличилась.

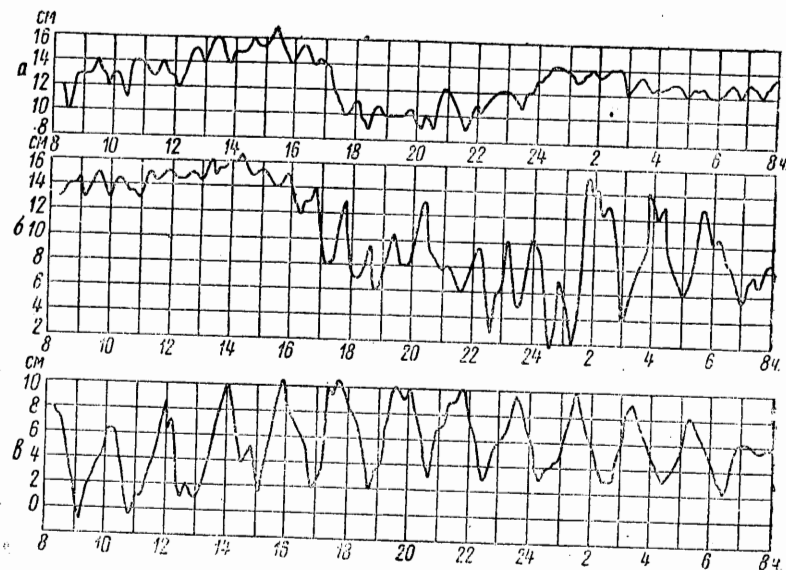


Рис. 40. Сейши оз. Иссык-Куль по записи самописца уровня у г. Рыбачье.
а — за 27—28 VIII; б — за 29—30 VIII; в — за 30—31 VIII 1958 г.

В результате сейши и сейшеобразные колебания продолжались почти двое суток. Одноузловая продольная сейша, отчетливо выраженная в течение суток, постепенно исчезла к 1 сентября. На восточном побережье в Джаргаланском заливе 29 августа почти одновременно также возникли периодические колебания. Однако эти колебания носили сложный характер и представляли собой интерференцию волн различных периодов, среди которых одноузловая продольная сейша отчетливо не проявляется. К сожалению, проследить за развитием этих колебаний в последующие дни (30—31 августа) не представилось возможным из-за отсутствия лимниграмм на водомерном посту у курорта Койсары. 29—30 августа на восточном побережье наблюдался слабый юго-западный ветер и только в 19 ч 29 августа был зарегистрирован северный ветер со скоростью 12 м/сек.

Аналогичные сейшевые колебания на оз. Иссык-Куль развиваются достаточно часто. Их можно было проследить 15—16 сен-

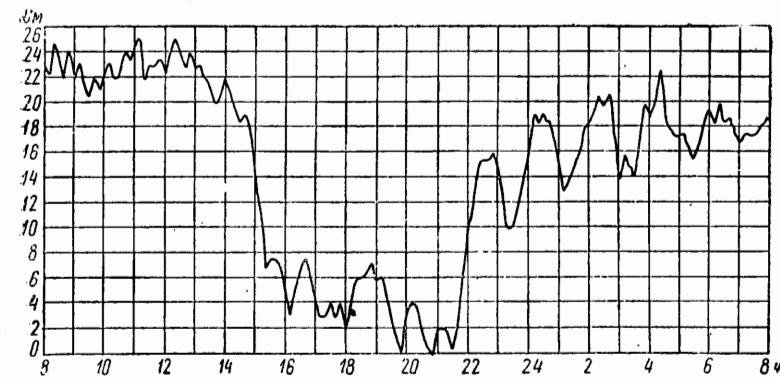


Рис. 41. Сейши оз. Иссык-Куль по записи самописца уровня воды у г. Рыбачье за 11—12 X 1959 г.

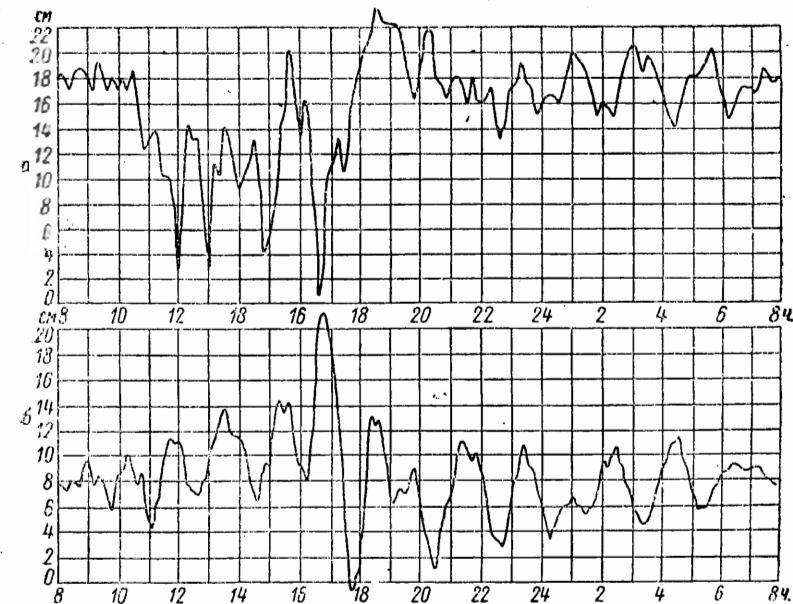


Рис. 42. Сейши оз. Иссык-Куль по записи самописцев уровня воды за 15—16 IX 1958 г.
а — у г. Рыбачье; б — в Джаргаланском заливе.

тября 1958 г., 20 февраля — 5 марта, 16—21 мая, 11—12 и 16—19 октября 1959 г. и в июле 1960 г. В каждом отдельном случае проявляется индивидуальный характер колебаний:

волны характеризуются различной асимметричностью, имеют разные высоты и периоды в зависимости от того, какие волны сейшеобразных колебаний интерферируются и сколько их интерферируется. Так, 11 октября 1959 г. сильный западный ветер, достигавший 40 м/сек в г. Рыбачьем, вызвал в западном заливе значительный сгон. Уровень воды за три часа понизился на 20 см и в течение последующих 5 ч (до 21 ч 11 октября) устойчиво занимал принятое положение. С ослаблением ветра повысилось давление над озером, а разность давления на западном и восточном побережьях возросла. В результате в ночные часы появились сейшеобразные колебания с периодом, близким к периоду одноузловой сейши (рис. 41). К утру же эти колебания почти прекратились. Колебания с малым периодом были слабо выражены. Аналогичным образом развивалось явление 18—19 октября. В течение же двух предшествующих суток (16—18 октября), несмотря на сильный западный ветер и явление сгона, достигающего почти той же величины (15—18 см), одноузловая сейша не возникла; отчетливо прослеживаются лишь сейшеобразные колебания с малыми периодами.

В некоторых случаях, как, например, 15—16 сентября 1958 г., резкий западный ветер вызывает сразу на озере сейши высотой до 20 см. Явление сгона почти незаметно. Колебания сложные, но по самописцу уровня в г. Рыбачьем можно установить, что они являются результатом сложения одноузловой и двухузловой сейш. Более отчетливо в эти сутки продольная одноузловая сейша проявилась на противоположном конце озера в Джаргаланском заливе. К вечеру 15 сентября колебания усилились, вероятно, по причине резкой смены ветра с юго-западного направления на восточно-юго-восточное. Несколько изменился и характер самих колебаний, возможно, за счет возникновения местной сейши (рис. 42).

Таким образом, из всего сказанного можно сделать следующие выводы. На оз. Иссык-Куль наблюдаются как сейши, так и сейшеобразные колебания, развивающиеся по преимуществу в продольном направлении. На большинстве лент самописцев уровня отчетливо выражена одноузловая продольная сейша с периодом, по данным наблюдений в г. Рыбачьем, в 1 ч 56 мин. Самописец в Джаргаланском заливе отмечает эту сейшу с периодом в 1 ч 36 мин и, кроме того, сейшу с периодом в 1 ч 21 мин. Возможно, что последняя сейша представляет собой сейшу местного происхождения. Двухузловые продольные сейши наблюдаются реже, но выражены достаточно отчетливо.

Вследствие больших глубин озера влияние трения водных масс о дно при сейшах ослаблено и затухание колебаний уровня происходит довольно медленно. По этой причине на озере наблюдаются длительные сейши продолжительностью до 65 ч.

ГЛАВА VIII

СЕЙШИ оз. БАЛХАШ

В литературе нет упоминаний о сейшах оз. Балхаш. До последнего времени на существующих водомерных постах не было самописцев уровня. Отдельные эпизодические наблюдения на временно установленных самописцах производились в 1955 г. экспедицией Лаборатории озероведения АН СССР. Гидрологическим отрядом этой экспедиции, работавшим под руководством А. И. Тихомирова, были зарегистрированы сейши как одноузловые, так и многоузловые.

Можно предполагать, что на оз. Балхаш имеются все условия для возникновения сейш и сейшеобразных колебаний и достаточно частого их повторения. Отсутствие внимания к этому явлению со стороны исследователей оз. Балхаш, вероятно, можно объяснить тем, что частые волнения, ветровые и стоковые течения обеспечивают хорошую перемешиваемость воды в озере и затухивают все другие проявления динамики водной массы.

Оз. Балхаш, огромный по площади водоем, расположено в северной части области внутреннего стока Средней Азии в условиях резко выраженного континентального климата. Озеро лежит в большой котловине на высоте 340,5 м над уровнем моря (по данным отметок 1931 г. [13]). Оно вытянуто почти с запада на восток и имеет удлиненную форму (рис. 43). Общая длина его 595 км, наибольшая ширина 74 км. Береговая линия озера очень извилиста: встречается много заливов, бухт, полуостровов. Наиболее крупные заливы: Ала-Куль, Каракамыс, Кашкентенгиз, Сарышаган, Бертыс и др. Многие из крупных полуостровов далеко вдаются в озеро и расчленяют его на отдельные участки. Особенно отчетливо озеро делится вдающимся в озеро п-вом Сарысек на две части — Западный и Восточный Балхаш. Эти части соединены сравнительно узким и неглубоким (до 3 м) проливом Узунарал. Обе они в свою очередь делятся на широкие плесы, отличающиеся друг от друга своими морфометрическими и физико-гидрологическими особенностями.

Западная часть озера представляет собой сравнительно широкий водоем с небольшими глубинами и весьма извилистой береговой линией. Восточный Балхаш значительно уже, длиннее и глубже. Береговая его линия менее извилиста.

Площадь водной поверхности озера составляет 17 575 км², на долю западной части приходится 69% этой площади.⁸ По сравнению с громадными размерами (по площади) озера глубины его ничтожны. Средняя глубина всего озера 6,13 м. Наи-

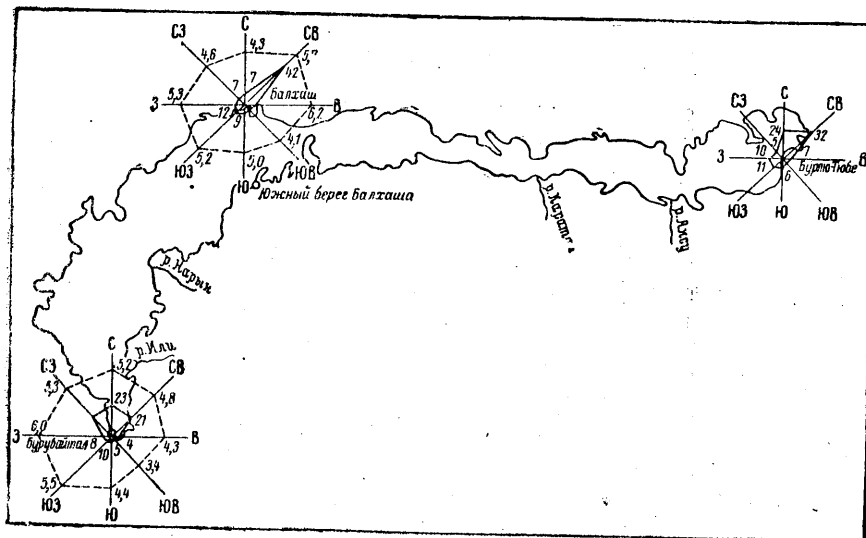


Рис. 43. Схема оз. Балхаш с указанием распределения направления и скоростей ветра в среднем за год (по М. Н. Тарасову).

более глубокая впадина, с максимальной глубиной 26,5 м, занимает центральную часть самого восточного плеса Восточного Балхаша. Средняя глубина Восточного Балхаша 8,79 м.

Западный Балхаш более мелководен: максимальная глубина 14 м (зал. Бертыс), средняя глубина 4,79 м.

Годовая амплитуда уровня оз. Балхаш сравнительно невелика и в среднем многолетнем составляет 80 см [13]. Не меньшей амплитуды достигают суточные колебания уровня. На это указывает А. И. Тихомиров, анализируя лимниграммы самописцев, временно установленных, как указывалось ранее, в 1955 г. экспедицией Лаборатории озероведения АН СССР в зал. Бертыс у г. Балхаш и у метеорологической станции «Южный берег Балхаша», восточнее дельты р. Или. Тихомиров отмечает, что в отдельные дни вследствие резкого изменения

⁸ Все морфометрические элементы озера приводятся по П. Ф. Домрачеву [13] и отнесены к уровню 1931 г. (340,5 м над уровнем моря).

силы и направления ветра, изменения уровня в течение менее чем часа могут составлять 20—30 см, что и наблюдалось на временном водомерном посту «Южный берег Балхаша» 18—19 июля 1955 г. Меньшие колебания уровня, порядка нескольких сантиметров, происходят почти ежедневно. Они связаны с ветровым режимом над озером.

Почти постоянно дующие ветры являются одной из характерных особенностей Прибалхашья. Об этом свидетельствуют все, кто посещал оз. Балхаш. Направление господствующих ветров, особенно в западной части озера, совпадают с его продольной осью. В южной оконечности Западного Балхаша преобладают северные, северо-западные и северо-восточные ветры; в средней части (г. Балхаш) — северо-восточные и в Восточном Балхаше (Бурлю-Тюбе) — северо-восточные и северные. Среднее за год распределение скоростей и направлений ветра за многолетний период показано на рис. 43. Данные о ветровом режиме заимствованы из книги М. Н. Тарасова [51]. Наиболее сильные ветры дуют с ЮЗ. Их скорость достигает 15 м/сек и более. Эти ветры имеют характер бурь, они обычно непродолжительны и внезапны. Штили над озером — явление нередкое, но они также кратковременны. В суточном ходе силы ветра подмечена одна особенность, заключающаяся в том, что начавшийся утром ветер к полудню усиливается, а к вечеру постепенно затихает.

В зависимости от ветрового режима на озере распространены сгоны-нагоны и волнение. Сгоны и нагоны достигают значительных размеров, в особенности у мелководных побережий. В озере во все сезоны года (кроме зимы) наблюдаются сгонно-нагонные течения, хорошо заметные в узких проливах: в Узунарале, в проливах, отделяющих о-в Алгазы от берегов, у с. Бурубайтал. Данные, приводимые в работах Г. Р. Юнусова [56], П. Ф. Домрачева [14] и М. Н. Тарасова [51], свидетельствуют о значительных масштабах этого явления. Так, скорости течения в проливе Узунарал, по Домрачеву, составляют 0,5—1,3 м/сек, по Юнусову — от 1,07 м/сек в начале нагона и до 0,21 м/сек в конце его. По данным Ленинградского отделения Гидроэнергопроекта, наибольшие скорости течения не превышали 0,51 м/сек. При сильных и длительных ветрах, особенно при ветрах вдоль продольной оси озера, а также в периоды затишья, после ветра заметные скорости течения (0,13 м/сек) наблюдались не только в проливах, но и в более широких частях озера. Эти сведения приводит М. Н. Тарасов, по данным измерений Балхашской экспедиции Гидрохимического института АН СССР, работавшей на оз. Балхаш с 1955 по 1958 г.

Сильные ветры возбуждают на озере волнение. Высоты волн в восточной части озера достигают 3,0—3,5 м, в западной — около 2,5 м [14]. Движение воды, вызываемое сильным

волнением, достигает дна, особенно на мелководных плесах, взмучивает донные отложения и является мощным фактором перемешивания водных масс по вертикали. Об этом имеются неоднократные упоминания в литературе.

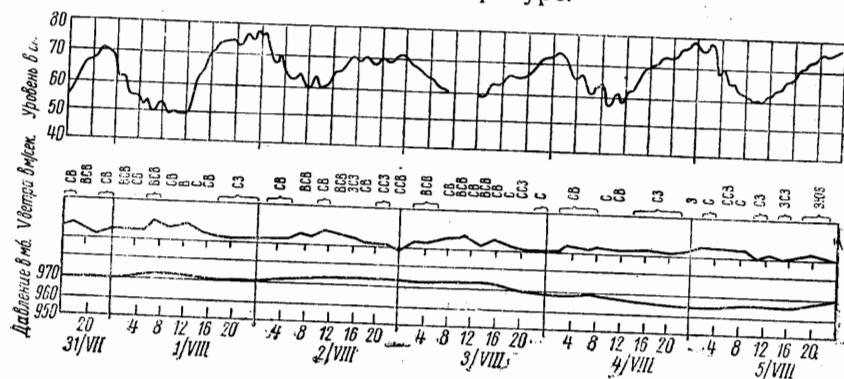


Рис. 44. Сейши оз. Балхаш по записи самописца уровня воды у в/п «Южный берег Балхаша» за 31 VII—5 VIII 1955 г. (по Тихомирову).

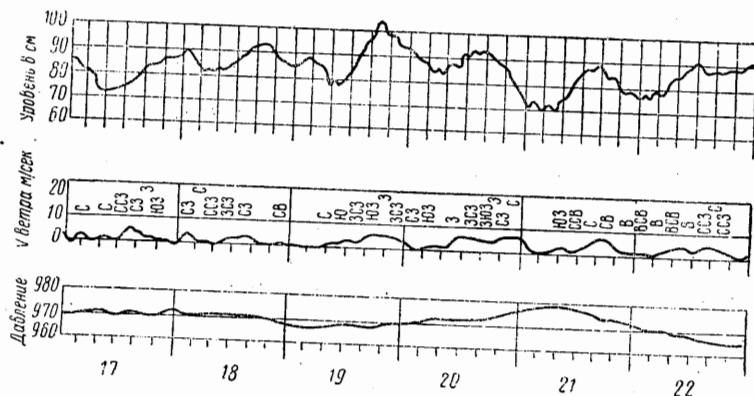


Рис. 45. Сейши оз. Балхаш по записи самописца уровня воды у г. Балхаш за 17—22 VIII 1955 г. (по Тихомирову).

Наряду с ветровыми течениями, волнением в динамике водных масс в условиях озера неизбежно должны принимать участие сейши и сейшеобразные колебания.

Сейши, как указывалось выше, инструментально были зарегистрированы экспедицией Лаборатории озероведения АН СССР в 1955 г. По данным А. И. Тихомирова, высота одноузловой сейши в бухте Бертыс 17—18 августа отмечена в 38 см, период ее изменялся от 22 до 26 ч, в другие дни — от 22 до 23 ч. С целью более детальной характеристики сейш были вновь проанализированы лимниграммы самописцев уровня за июль—

октябрь 1955 г. Были проведены также теоретические расчеты периодов сейш по морфометрическим данным озера.

Можно предполагать, что резкое разграничение западной части озера от восточной обеспечивает самостоятельное возникновение сейш в обеих частях озера. Расчеты по формуле Мериана показывают, что период одноузловой продольной сейши для Восточного Балхаша составляет 17 ч 53 мин, для Западного — 24 ч. Сейша с периодом, близким к вычисленному, зарегистрирована самописцем уровня «Валдай» несколько раз за сравнительно короткий промежуток его действия — у метеорологической станции «Южный берег Балхаша» с 31 июля по 5 августа 1955 г. и у г. Балхаш с 17 по 22 августа 1955 г. (рис. 44, 45). Сведения о периодах сейш приведены в табл. 22.

Наиболее отчетливо выражена сейша с 17 по 22 августа у г. Балхаш (рис. 45). В течение пяти суток пять сейшевых волн, почти правильной формы, следовали одна за другой. Средний период этой сейши оказался равным 24 ч 05 мин, наибольшая высота 38 см, средняя — 28 см. Накануне возникновения сейши атмосферное давление возросло на 10—12 мм, скорость ветра достигла 10 м/сек; ветер имел направление северных румбов. В последующие дни направление ветра было переменным, скорость его заметно снизилась, и в отдельные часы наблюдалось затишье. Атмосферное давление почти сохранялось на одном уровне.

В другие дни сейши наблюдались, но не столь правильной формы; их скорее следует отнести к сейшеобразным колебаниям, возникшим при нагоне. Такого рода колебания возникли в бухте Бертыс (у г. Балхаш) 27 августа и продолжались до 1 сентября. Значительный нагон наблюдался 24 августа в связи с ветрами западно-юго-западного направления и скоростью, превышающей 15 м/сек. Нагон повторился 26 августа, но был меньшей величины. В последующие дни ветер менял направление, сохраняя в суточном ходе особенности ветрового режима над оз. Балхаш — усиление ветра в дневные часы суток.

Суточный ход ветра у водомерного поста «Южный берег Балхаша» имеет иной характер, чем в бухте Бертыс. Последняя хорошо укрыта от непосредственного воздействия волн озера. По середине входа в нее расположен остров; глубины в этой

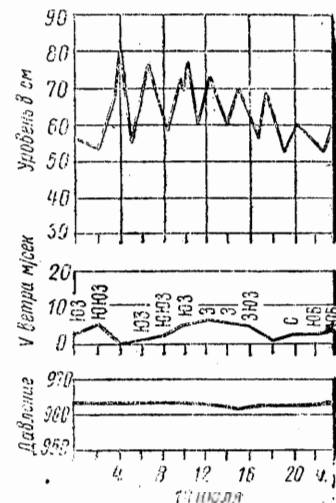


Рис. 46. Сейши оз. Балхаш за 19 VII 1955 г. (по Тихомирову).

бухте относительно велики. Водомерный пост «Южный берег Балхаша» был расположен в широкой части бухты, открытой в сторону озера. Сама бухта отличается мелководьем и плоским дном. Уровень воды по этой причине испытывает здесь более или менее резкие колебания, амплитуда которых достигала 40 см и более за промежуток времени менее одного часа. Эти резкие повышения или понижения уровня воды вызваны столь же резкими изменениями силы ветра. Однако в них обращает на себя внимание периодичность, которую можно отнести за счет сейш или сейшеобразных колебаний. На рис. 46 изображены колебания уровней воды за 19 июля с периодом, близким к 2 ч 47 мин, а на рис. 44 — сложные колебания за период с 31 августа по 5 сентября, среди которых прослеживается одноузловая сейша с периодом около 24 ч. Эти колебания трудно объяснить только сгонно-нагонными явлениями. Колебания с периодом около 2 ч 40 мин, по всей вероятности, представляют собой местные сейши, возникшие в самой бухте, или, быть может, многоузловые сейши всего озера.

Кроме обработки лент самописцев и вычисления по ним величин средних периодов сейш оз. Балхаш, были произведены теоретические расчеты методами А. Дефанта, Л. К. Давыдова и методом импедансов. Все расчеты производились отдельно для Западного и Восточного Балхаша. Результаты расчетов при-

Таблица 23

Периоды сейш оз. Балхаш, рассчитанные теоретически

Метод расчета	Периоды сейш			
	одноузловой,		двуузловой,	
	ч	мин	ч	мин
Западный Балхаш				
Средний по лимниграммам				
самописца уровня у г. Балхаш	23	48	—	—
у в/п. «Южный берег Балхаша»	24	01	—	—
По Мериану	24	00	12	00
По Давыдову	18	45	9	22
По методу импедансов	11	38	—	—
По Дефанту	15	40	—	—
Восточный Балхаш				
По Мериану	17	53	8	36
По Давыдову	14	49	7	24
По методу импедансов	18	04	—	—

ведены в табл. 23. От применения метода Кристалла пришлось отказаться из-за отсутствия достаточно надежной батиметрической карты озера. Поэтому и результаты расчетов по всем методам нужно рассматривать как ориентировочные.

ГЛАВА IX

СЕЙШИ ТЕЛЕЦКОГО ОЗЕРА

Телецкое озеро расположено в северо-восточной части Алтая на высоте 473 м над уровнем моря. По своим размерам и наибольшей глубине (325 м) оно занимает четвертое место среди горных озер СССР. Озеро имеет вытянутую форму. Длина его 77,7 км, средняя ширина 3,2 км. Площадь водной поверхности 230,6 км², средняя глубина 174 м [44].

Телецкое озеро состоит из двух плесов. Первый из них представляет собой южную, наиболее обширную и глубокую часть озера. Начинается он от устья р. Чулышман, впадающей в озеро с юга, и тянется до м. Ажи. Длина этого плеса 54,4 км. Преобладающее направление меридиональное. Это направление у зал. Камга меняется на широтное (рис. 47). Второй плес меньше по размерам. Он располагается от м. Ажи до истока р. Бии, вытекающей из озера. Его направление широтное. Длина 18,6 км. Этот плес в свою очередь состоит из двух частей, одна из которых представляет собой мелководье, постепенно сужающееся к истоку р. Бии. Максимальная глубина мелководья всего 20 м, средняя 11 м, в то время как глубины второй части этого плеса достигают 150 м. В целом в озере глубины, превышающие 200 м, занимают около 50% площади дна озера. Поперечный профиль дна озера выравнен, дно плоское, глубины от уреза воды быстро нарастают.

Береговая линия озера слабо изрезана. Заливов и бухт очень мало. Наиболее крупными заливами являются Камга и Кыги. Зал. Камга расположен в северо-восточном углу озера. Длина его 6,4 км. Преобладающие глубины в этом заливе 20—40 м, наибольшая 150 м. Зал. Кыги значительно меньше. Длина его 2,2 км. Он находится в юго-восточном углу озера.

Телецкое озеро занимает сравнительно узкую и глубокую горную долину, ограниченную в большей своей части горными хребтами высотой от 925 до 2000 м. Горные хребты вытянуты

параллельно берегам озера; ближайшие из них, с запада — Корунду, с востока — Корбу и Телецкий, имеют меридиональное направление и препятствуют проникновению в котловину озера ветров восточного и западного направлений. Ряд высоких горных хребтов широтного простираения на юге является преградой для движения воздушных масс, поступающих с юга. Однако эти массы проникают в котловину озера через долину р. Чулышман или долину р. Кыги. Эта долина далеко вдается в глубь Алтая и является естественным путем для южных и юго-восточных ветров. Менее всего долина Телецкого озера защищена от внешних воздействий с севера. Здесь через невысокие горные отроги воздушные массы более или менее свободно проникают в котловину озера по долине вытекающей из озера р. Бии.

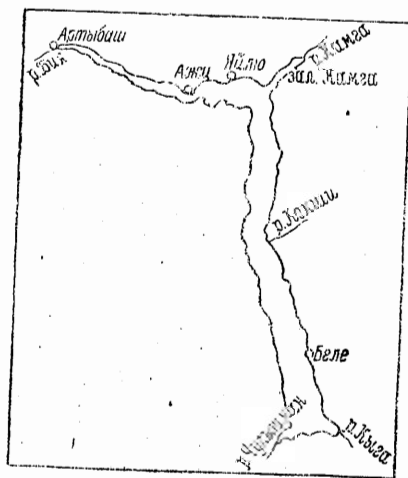


Рис. 47. Схема Телецкого озера.

Данные наблюдений метеорологических станций Артыбаш, Яйлю, Беле (см. рис. 47) и анализ ветрового режима, выполненный Н. Г. Николаевым [38], свидетельствуют о следующем. Основные воздушные течения в долине озера имеют два господствующих и в то же время противоположных направления, связанные с направлением озерной долины. Ветры южной составляющей, дующие вдоль озера с южного конца озера к истоку р. Бии, местным населением названы «верховкой». Ветры, дующие с долины р. Бии к южному концу озера, называют «низовкой». Оба направления ветра отличаются большой повторяемостью. Поступающие с юга воздушные течения направляются по долине р. Чулышман или долине р. Кыги. При вступлении в узкую, с высокими и крутыми склонами, долину оз. Телецкого они движутся вдоль нее, как по жолобу между горными хребтами, образующими долину. Изгибы этого жолоба вызывают соответствующие отклонения и воздушного потока. В связи с этим на метеорологических станциях, расположенных в разных концах озера (см. рис. 47), верховка, так же как и низовка, регистрируются как ветры то одного, то другого направления в зависимости от направления озерной долины и положения метеорологических станций.

Воздушный поток, поступивший в долину с того или иного конца ее, не всегда достигает противоположного выхода из нее и ветер затихает над акваторией озера. Бывают и такие слу-

чай, когда, наоборот, ветер зарождается в удалении от того или иного конца озера. Так, по данным Н. Г. Николаева, верховка в северо-западной части озера начинается от м. Ажи, о чем свидетельствуют возбуждаемые в данном месте волны. Во время верховки скорости ветра достигают значительных величин, особенно в первую половину дня. В южном конце озера скорости ветра больше и достигают в отдельные дни 14 м/сек.

Ветры над Телецким озером не ограничиваются двумя основными направлениями, рассмотренными выше. Существуют, кроме того, и горно-долинные ветры, но их значение в общем ветровом режиме невелико. По скорости и продолжительности они уступают ветрам основных направлений.

Для оз. Телецкого характерна довольно большая средняя годовая амплитуда уровня, равная 350—375 см. Озеро отличается частым и сильным волнением. Большая длина озера, сильные ветры, периодически меняющие свое направление, создают условия, благоприятствующие сгонам и нагонам. Специальных наблюдений над этими явлениями, по-видимому, не производилось; в литературе можно найти лишь краткие упоминания о них.

Размеры и удлиненная форма Телецкого озера, своеобразный ветровой режим над озером, связанный несомненно с соответствующими возмущениями в атмосфере и изменением давления, — все это должно способствовать возникновению и развитию сейш. О возможности возникновения сейш на Телецком озере имеются указания у Пиварелиса [40], но подтверждений этого предположения данными фактических наблюдений нет.

Можно предполагать, что на озере развиваются продольные сейши и сейшеобразные колебания, связанные со сгонами и нагонами. Возникновение поперечных сейш вследствие малой ширины по сравнению с длиной и специфичности ветрового режима с преобладанием ветров, дующих главным образом в продольном направлении, маловероятно. Вполне вероятно образование местных сейш в обособленных заливах, как, например, в зал. Камга, длина которого довольно значительна (6,4 км). Как обособленный участок можно рассматривать второй плес озера, вытянутый в широтном направлении. Он, как указывалось выше, более узкий и отличается от первого плеса значительно меньшими глубинами. Кроме того, имеются указания, что иногда ветры основного направления зарождаются в удалении от концов озера над его акваторией и при этом упоминается северо-западная (широтная) часть озера, в районе м. Ажи, откуда и начинается этот плес.

На Телецком озере до сего времени не производилась непрерывная регистрация колебаний уровня при помощи самописцев или учащенных отсчетов по водомерной рейке. Поэтому характеристика возможных сейш этого водоема может быть сделана

лишь при помощи расчетов различными теоретическими методами. Такого рода расчеты (по формуле Мериана, по методам Л. К. Давыдова и А. Дефанта) проделаны в настоящем исследовании, причем рассчитаны периоды продольных одноузловой и двухузловой сейш. Кроме периодов, были определены положения узловых линий тех же сейш. Результаты приведены в табл. 24.

Таблица 24
Результаты расчетов периодов и положений узловых линий одноузловой и двухузловой продольных сейш Телецкого озера

Методы расчета	Периоды сейш, мин		Расстояние узловой линии сейш (км) от южного края озера	
	одноузловой	двухузловой	одноузловой	двухузловой
По Мериану	62,7	31,3	—	—
По Дефанту	46,0	25,0	30,7	17 и 51
По Давыдову	50,2	25,1	30,5	14,5 и 47

Таким образом, можно предполагать, что период одноузловой продольной сейши близок к 50 мин, а двухузловой — к 25 мин и что узловая линия одноузловой продольной сейши проходит ближе к южному концу, чем к северному. Узловые же линии двухузловой сейши располагаются почти на одинаковом расстоянии от обоих концов озера.

Сведения о положении узловых линий могут быть в дальнейшем использованы для выбора мест для установки самописцев уровня, а также для организации и проведения наблюдений над термическим и гидрохимическим режимом вод озера на разных глубинах.

С наибольшим эффектом самописцы уровня могли бы быть установлены в устье р. Кыги, у Яйлю и в Артыбаше (в местах действующих водомерных постов). Дополнительно для изучения сейш было бы желательно установить самописцы уровня у м. Ажи (на границе глубоководного и мелководного плесов) и вблизи устья р. Кокши, в районе местоположения узловой линии основной продольной сейши и пучности двухузловой сейши.

ГЛАВА X

СЕЙШИ АРАЛЬСКОГО МОРЯ

Аральское море — одно из величайших озер мира. Площадь его водной поверхности, по данным 1924 г., 64 023 км², длина 428 км, наибольшая ширина 284 км. Эти морфометрические характеристики заимствованы из БСЭ. В исследовании М. В. Ремезовой [43], посвященном сейшам Аральского моря, приводятся несколько иные данные по морфометрии моря, а именно: площадь водной поверхности моря принимается равной 66 136 км², длина 426,5 км, наибольшая ширина 245,7 км, средняя глубина 14,7 м.

Береговая линия моря довольно сложная. Северные берега местами высокие, местами низкие, изрезаны большими заливами. Восточные берега низменные, песчаные, сильно изрезанные множеством мелких заливов, песчаных островов. Южный берег образован огромной дельтой Аму-Дарьи. Западный берег высокий, обрывистый, лишен заливов.

В Аральском море много островов; крупнейшие из них Кокарал (площадь 273 км²), Возрождения (216 км²), Барса-Кельмес (133 км²).

По данным имеющихся наблюдений, над Аральским морем решительно преобладают ветры северо-восточных румбов. Наиболее редкими являются ветры южных направлений. Наибольшими скоростями ветра, по данным Л. С. Берга [3], отличается апрель (средние скорости ветра в Казалинске в этом месяце составляют 3,3—5,9 м/сек, в Кызыл-Джаре — 7,1—7,8 м/сек). Минимальные скорости ветра падают на август. Число дней со скоростями ветра более 15 м/сек, по данным Л. С. Берга (для Казалинска), в среднем составляет около 9.

Большие размеры озера, совпадение в значительной мере продольной оси с направлением преобладающих ветров, иногда достигающих значительной силы, заставляют предполагать существование сейш и сейшеобразных колебаний на Аральском море. Соотношение же между большой длиной и относительно

малыми глубинами заставляют предполагать, что периоды продольных сейш должны быть довольно значительными. Наблюдения над сейшами на Аральском море начались довольно давно. Но, несмотря на это, сейши этого водоема нельзя считать изученными в полной мере.

Еще в 1900 г. Л. С. Берг во время своих экспедиционных исследований Аральского моря обнаружил при помощи так называемого племирамента, прибора, основанного на принципе сифона, в заливе Сары-Чаганак (северная оконечность моря) сейши с периодами 16—20 ч и у Алты-Кудука от 8 до 11,6 ч. Сейши наблюдались в совершенно тихую погоду.

В сентябре 1904 г. по просьбе Л. С. Берга Главной геофизической обсерваторией был установлен лимниграф у ст. Аральское море. Записи этого лимниграфа были обработаны Л. С. Бергом за время с сентября 1904 г. по август 1905 г., за исключением периода ледостава, всего за 263 дня. На лентах самописца уровня, по сообщению Л. С. Берга, можно было обнаружить несколько сейш. Чаще всего наблюдалась, по-видимому, одноузловая продольная сейша, средний период которой по записи самописца оказался равным $22\frac{3}{4}$ ч, или 22 ч 45 мин. Период этой сейши по записям самописца не оставался постоянным, а изменялся в пределах от 18 до 36 ч. Всего за 263 дня было зарегистрировано 130 хорошо выраженных сейш с периодом от 22 до 23,5 ч. Причинами колебаний периодов сейш Л. С. Берг считал: 1) интерференции продольной одноузловой сейши с сейшами того же периода, но с разными начальными фазами; 2) возникновение так называемых дикротных сейш (по Форелю). Возможно при этом, что Малое море и Западный бассейн имеют самостоятельные сейши; 3) изменение длины продольного профиля по двум причинам: изменение направлений осей колебаний и удлинение профиля вследствие заливания низин при подъемах уровня и 4) изменение глубин профиля.

Продольная одноузловая сейша отличается длительностью существования. В этом отношении Аральское море уступает только оз. Байкал. Наиболее длительная серия продольной одноузловой сейши наблюдалась с 27 июня по 18 июля 1905 г. продолжительностью в 22 дня. Следует заметить, что в чистом виде сейши на Аральском море наблюдаются сравнительно редко. По данным Л. С. Берга, дикротные сейши составляют 75% всех наблюдаемых сейш. Кривые сейш с периодом в 22 ч 45 мин на лентах самописца уровня никогда не бывают правильными. Обычно они характеризуются неединоковыми амплитудами (рис. 48). Л. С. Берг всюду называет высоты сейш амплитудами.

По данным Берга, амплитуды сейш Аральского моря характеризуются величинами, приведенными в табл. 25.⁹

⁹ В этой таблице приведены амплитуды сейш; в монографии же Берга в аналогичной таблице приводятся высоты сейш.

Средняя амплитуда сейш на ст. Аральское море по приведенным данным составляла 12 см. Наибольшей амплитуды в 50 см сейша достигла 31 мая — 1 июня 1905 г.

Он также отмечает, что наряду с сейшами на Аральском море наблюдаются денивелляции, носящие характер сейш, но явно нарушенные под воздействием ветра. Такие колебания,

по данным Л. С. Берга, могут отличаться от сейш в чистом виде и амплитудами, значительно большими, и большей продолжительностью периода. Явления нагона и сгона еще увеличивают амплитуды колебаний уровня. Так, например, 27 апреля 1902 г. уровень воды при сгоне понизился у ст. Аральское море более чем на 2 м.

Таблица 25

Амплитуды сейш Аральского моря по лимниграммам самописца у ст. Аральское море, см (по Л. С. Бергу)

Месяцы 1905 г.	Средняя	Наибольшая	Наименьшая
Апрель	9,50	15,0	5,0
Май	9,25	20,0	4,5
Июнь	16,5	50,0	5,0
Июль	11,00	23,0	6,0
Август	18,25	33,0	7,0
Сентябрь	10,50	15,5	5,0
Октябрь	10,5	20,5	5,0
Ноябрь	11,5	34,5	3,0
Декабрь	11,25	18,5	3,5

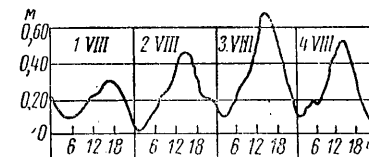


Рис. 48. Сейша Аральского моря (по Л. С. Бергу).

В 1937 г. в Трудах государственного Гидрологического института было опубликовано исследование сейш Аральского моря, выполненное М. В. Ремезовой [43]. По существу, это исследование ставило своей задачей не столько изучение сейш Аральского моря как природного явления, свойственного одному из крупнейших водоемов мира, сколько проверку существующих методов расчета элементов сейш. Об этом свидетельствует подзаголовок рассматриваемой работы: «Пример применения теоретических методов исследования сейшеобразных колебаний к частному случаю продольных сейш моря». М. В. Ремезова произвела расчеты периодов одноузловой и двухузловой продольных сейш Аральского моря при помощи ряда методов. Результаты этих расчетов приведены в табл. 26. Даже беглый просмотр данных этой таблицы позволяет подметить, что результаты расчетов периодов как одноузловой, так и двухузловой продольных сейш, выполненных различными методами, довольно значительно отличаются друг от друга.

Наименьшая величина периода одноузловой продольной сейши получилась равной 12 ч 05 мин (японский метод), наи-

большая — 25 ч 04 мин (усовершенствованный метод Дюбуа). Наилучшие результаты дал (с точки зрения сходимости расчетного периода с наблюдавшимся) метод Дюбуа (неусовершенствованный), наихудший — метод японских ученых и Ритца. Довольно значительно отличаются друг от друга также и периоды двухузловых сейш: наибольший период получился в результате расчета по усовершенствованному методу Дюбуа — 12 ч 32 мин, наименьший по методу Кристала — 7 ч 43 мин.

Таблица 26

Продолжительность периодов одноузловой и двухузловой продольных сейш Аральского моря, по расчетам М. В. Ремезовой (периоды приведены с округлением до минуты)

Метод расчета	Одноузловая		Двухузловая	
	ч	мин	ч	мин
Мериана (по Бергу)	19	02	9	31
Дюбуа (по Бергу)	18	44	—	—
Мериана (по Ремезовой)	19	44	9	52
Дюбуа (по Ремезовой)	20	16	10	08
Дюбуа усовершенствованный	25	05	12	32
Японских ученых	12	05	9	24
Кристала с заменой, равнвелнкой площадью	13	22	7	43
Кристала с заменой, по Девисону	16	25	8	58
Кристала с решением его уравнения, по Ритцу	15	38	10	26

Таким образом, наибольший рассчитанный период превышает наименьший из рассчитанных для одноузловой сейши (по данным М. В. Ремезовой) в 2 раза, а для двухузловой — в 1,63 раза. Можно сказать, что, по существу, ни один из рассмотренных методов не дал удовлетворительных результатов, в чем можно будет убедиться в дальнейшем при рассмотрении результатов опытов В. П. Дубова, исследований А. В. Караушева. Никак нельзя согласиться с М. В. Ремезовой в том, что метод Ритца является наиболее точным. Это, несомненно, недоразумение, основанное на том, что все испробованные методы расчетов относятся не к Аральскому морю, а к некоторому фиктивному водоему, удовлетворяющему определенным условиям, положенным в основу того или иного метода (прямолинейность бассейна, постоянная ширина, а в некоторых случаях и постоянная глубина, неучет трения и влияния силы Кориолиса).

В 1958 г. В. П. Дубов произвел очень интересные исследования сейш Аральского моря на модели этого водоема [16]. Модель Аральского моря была изготовлена из цемента на основании батиметрической карты, опубликованной в упоминавшей-

ся ранее монографии Л. С. Берга. Горизонтальный масштаб модели был 1:525 000, вертикальный — 1:500. Длина модели по тальвегу ст. Аральское море — зал. Кень-Камыш (рис. 49) 81 см, наибольшая ширина 43,5 см, средняя глубина около 3 см, наибольшая 14 см. Опыты производились так же, как и у В. Н. Соловьева при исследовании сейш оз. Байкал и у В. П. Дубова при исследовании сейш Балтийского моря [15]. Колебания уровня в модели вызывались ритмическими погру-

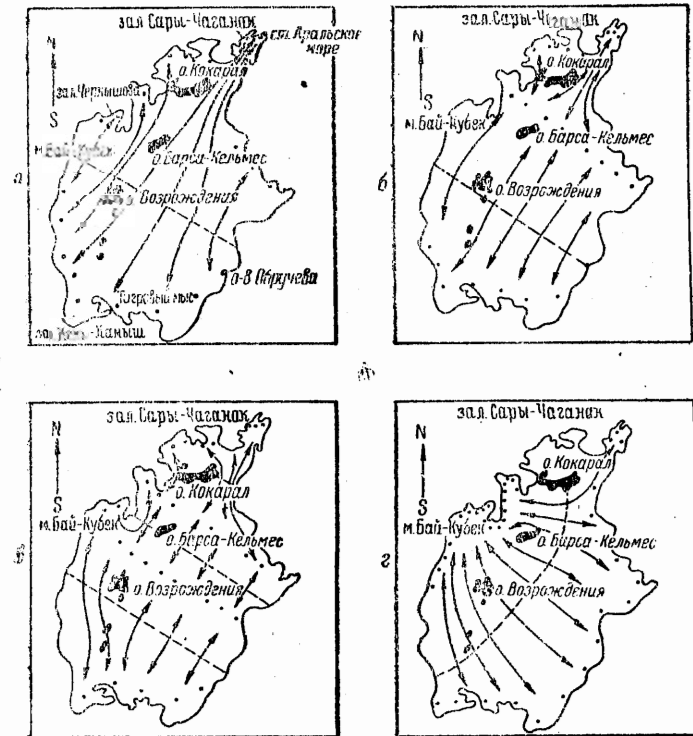


Рис. 49. Расположение узловых линий и пучностей при сейшах в Аральском море (по В. П. Дубову). а — при одноузловой продольной сейше; б — при двухузловой продольной сейше; в — при трехузловой продольной сейше; г — при поперечной сейше.

жениями в воду модели небольшой дощечки и регистрировались при помощи специальных самописцев уровня, описанных в работах указанных исследователей. Переход от периодов сейш, определенных на модели, приводился к периоду в естественных условиях по формуле В. Н. Соловьева (см. стр. 102).

Результаты опытов, проведенных В. П. Дубовым, сведены в табл. 27. В этой таблице обращает на себя внимание относительно малая разница в периодах двухузловой продольной и

одноузловой поперечной сейш. Это обстоятельство нужно иметь в виду при анализе фактических данных — записей самописцев уровня.

Таким образом, по мнению Дубова, на Аральском море обнаружены в результате опытов четыре сейши: три продольные по продольной оси моря (зал. Кень-Камыш — ст. Араль-

Таблица 27

Периоды сейш Аральского моря на модели и в естественных условиях, по данным В. П. Дубова (T' — период на модели; T — период в естественных условиях; H — амплитуда колебаний; δ — логарифмический декремент затухания)

Название сейш	T' , сек	H см	δ	T , ч мин	
Продольная одноузловая	3,590	162	0,462	21	30
" двухузловая	1,660	81	0,194	10	27
" трехузловая	1,120	54	0,372	6	46
Поперечная одноузловая	1,456	87	0,189	9	10

ское море) и одна поперечная — по направлению Бик-Тау — зал. Кум-Суат.

На рис. 49 показаны положения узловых линий, определенных так же, как и периоды сейш, опытным путем на модели. Совершенно очевидно, что положение узловых линий и береговые очертания моря, наряду с распределением глубин в прибрежных областях, определяют амплитуды той или иной сейши. Так, вследствие узости зал. Сары-Чаганак и расположения области пучности у конца продольной оси моря (ст. Аральское море) амплитуды одноузловой продольной сейши будут наибольшими. Аналогичным образом можно предполагать, что большие амплитуды при поперечной сейше будут наблюдаться в зал. Кум-Суат и Чернышова. Опыты В. П. Дубова подтверждают эти предположения. Интересную деталь отмечает Дубов относительно поперечной сейши. Если для всего моря сейша является поперечной, то для зал. Сары-Чаганак она оказывается продольной вследствие того, что при поперечной сейше линии тока, как показали исследования на модели, заходят в этот залив по направлению, совпадающему с продольной осью Сары-Чанака. Еще Л. С. Берг отмечал, что у ст. Аральское море сравнительно редко наблюдается одноузловая продольная сейша в чистом виде. Можно полагать, что это обстоятельство есть следствие сложения различных сейш — одноузловой продольной, одноузловой поперечной, а возможно, кроме того, и сейши местного происхождения, возникающей в заливе.

За годы, прошедшие со времени исследований сейш Аральского моря Л. С. Бергом, накопились значительные материалы наблюдений за колебаниями уровня воды. По-прежнему до настоящего времени действовал самописец у ст. Аральское море. К сожалению, ленты этого самописца разбросаны по различным архивам и в связи с этим оказываются трудно доступными, а часть из них, по-видимому, безвозвратно утеряна.

Кроме этого самописца, некоторое время действовал самописец, установленный у м. Тигрового (о-в Токмак-Ата в юго-западном углу Аральского моря). Для настоящей монографии были обработаны ленты этих двух самописцев за 1954—1956 гг. Обработка заключалась в статистическом определении по лентам самописцев периодов сейш, в подсчете повторяемости их амплитуд. Была сделана попытка, кроме того, повторить расчеты периодов сейш различными способами. Наконец, периоды сейш подсчитывались по методу Бюи-Балло.

Анализ лент обоих самописцев за указанный период наблюдений, статистические подсчеты позволили прийти к следующим выводам. На ст. Аральское море наблюдались две продольные сейши: одна с периодом 23 ч, другая с периодом 8 ч 18 мин. Первая из них — продольная одноузловая сейша, вторая, вероятно, также продольная, но трехузловая. Амплитуды обеих сейш сравнительно невелики: средняя одноузловой 21 см, наибольшая — 42 см (1956 г.). Средняя амплитуда трехузловой продольной сейши около 7 см, наибольшая — 38 см (1955 г.). Можно при этом предполагать, что наибольшая амплитуда относится не к сейшам, а к сейшеобразным, или сгонно-нагонным, колебаниям.

На лентах самописца уровня у м. Тигрового сейша с периодом около 23 ч представляет собой исключительно редкое явление. Здесь решительно преобладает сейша с периодом 8 ч 34 мин, которая, по-видимому, также представляет собой трехузловую продольную сейшу всего озера. Возможно, что обе сейши, отмеченные у ст. Аральское море и у м. Тигрового, с периодами, близкими к 8 ч, являются поперечными одноузловыми сейшами. Амплитуды уровня поперечной сейши значительно меньше, чем продольной.

Теоретические расчеты периодов сейш дали величины, близкие к тем, что были получены М. В. Ремезовой, и потому здесь не приводятся.

Таким образом, периоды сейш, наблюдаемые и рассчитанные различными способами, дают значительные расхождения. Много лучшие результаты были получены В. П. Дубовым при исследовании сейш на модели Аральского моря. Причин указанных расхождений несколько. Прежде всего нужно иметь в виду, что на Аральском море, как это правильно отметил А. В. Караушев, решительно преобладают сейшеобразные колебания, а не сейши. Записи самописцев на лентах при различных направле-

ниях сгонно-нагонных явлений могут вызвать периодические колебания различных периодов.

Все методы теоретических расчетов основаны на ряде допущений. Предположение о совпадении плоскости колебаний с направлением продольной оси далеко не всегда соответствует действительности. Кроме того, теоретические расчеты основываются на предположении о возможности замены естественного водоема прямоугольным, удовлетворяющим некоторым условиям (Кристал, Дефант и др.), что едва ли допустимо при сложных очертаниях береговой линии Аральского моря, сложности распределения глубин, наличии большого числа островов и т. п. Далее, нужно принять во внимание, что вся современная теория сейш создана без учета трения и силы Кориолиса. П. А. Киткин [23] достаточно убедительно показал, что под влиянием вращения Земли на Аральском море происходит вращение плоскости колебаний уровня при сейше по часовой стрелке. Наконец, как совершенно правильно отмечал в свое время Л. С. Берг [3], повышение уровня воды моря при нагонах вызывает заливание сравнительно больших площадей низин, и тем самым увеличивается длина моря и изменяются глубины по профилю.

Можно с уверенностью сказать, что ни один из существующих методов расчета не дает возможности создать правильную характеристику сейш Аральского моря как в отношении их периодов, так и положения узловых линий. Единственно надежным методом изучения сейш Аральского моря в настоящее время является метод моделей. Непосредственные наблюдения могли бы в значительной мере помочь этим исследованиям. Но при этом необходимо установить дополнительно самописцы уровня на о-вах Кокарал, Барса-Кельмес, Возрождения, в зал. Кень-Камыш, в районе Обручева и в зал. Чернышова [16].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. На озерах СССР наблюдаются периодические колебания уровня, представляющие собой либо сейши (свободные колебания), либо сейшеобразные, или сгонно-нагонные, колебания (автоколебания). В подавляющем большинстве случаев преобладают сейшеобразные колебания, и только на оз. Байкал, судя по имеющимся наблюдениям, превалируют сейши в чистом виде.
2. Периоды сейш и сейшеобразных колебаний на озерах СССР меняются весьма в широких пределах: от нескольких десятков минут до промежутков времени, близких к суткам (Аральское море, оз. Балхаш), в зависимости от размеров водоемов и их глубин.
3. Как правило, амплитуды сейш на наших озерах невелики. В большинстве случаев они не превышают 20—30 см, и только на Аральском море Л. С. Бергом отмечена амплитуда сейши до 50 см. Можно предполагать, что эта амплитуда наблюдалась при сейшеобразных колебаниях.
4. Основными причинами сейш на озерах СССР являются изменения атмосферного давления и ветер. Резкие изменения атмосферного давления во время прохождения над озером или вблизи от него атмосферных возмущений приводят к наиболее резко выраженным сейшам с наибольшими амплитудами. Различия в атмосферном давлении на противоположных концах озера вызывают возникновение сейш в чистом виде, но с малыми амплитудами. При образовании сгонов и нагонов скопления водных масс в одной части озера также могут привести к возникновению сейш в чистом виде при условии прекращения ветра, вызвавшего сгон или нагон. При продолжающемся ветре сгоны и нагоны сопровождаются сейшеобразными, или сгонно-нагонными, колебаниями уровня, которые при сходстве их с сейшами отличаются от них динамической структурой и отсутствием тенденции к затуханию, свойственной сейшам.

5. Существующие теории сейш позволили разработать методы расчетов периодов сейш и положения их узловых линий. Одни из этих методов просты (Мериан, Дюбуа), но применение их носит ограниченный характер и в ряде случаев приводит к значительным ошибкам. Другие, теоретически более обоснованные (Кристал, Дефант, Праудмэн и др.), носят довольно сложный характер, требуют большой затраты времени и труда для производства расчетов и иногда также приводят к неудовлетворительным результатам.

6. Можно высказать следующие рекомендации относительно применения тех или иных методов расчета элементов сейш:

а) для озер с простыми очертаниями в плане и со сравнительно незначительными изменениями глубин вполне удовлетворительные результаты могут быть получены при расчетах периодов сейш, главным образом продольных одноузловых, при использовании формулы Мериана и метода Дюбуа;

б) при сложных очертаниях береговой линии и более сложном распределении глубин наиболее рационально пользоваться методами Кристала, Дефанта, Праудмэна и способом импедансов. В случае, если нормальная кривая носит достаточно сложный характер, лучше применять метод Дефанта или способ импедансов. При подготовке к расчетам по методам Кристала или Дефанта для определения периодов сейш в первом приближении можно пользоваться приближенными методом Давыдова или формулой Мериана. От метода Дефанта приходится отказываться, если на обоих или даже на одном конце озера располагаются обширные отмели. Наличие их при расчетах периодов сейш по методу Дефанта может привести к большим ошибкам. Одним из несомненных достоинств метода Дефанта по сравнению с методом Кристала является его большая простота, в особенности при определении положения узловых линий;

в) при очень сложных очертаниях береговой линии, большом числе бухт, заливов и островов, с разнообразным и сложным распределением глубин ни один из указанных методов не дает удовлетворительных результатов.

7. Все существующие методы расчета периодов сейш и положения их узловых линий основаны на уравнениях, выведенных без учета трения и силы Кориолиса. Вследствие неучета трения все существующие методы расчета периодов сейш дают несколько преувеличенные величины этих периодов,¹⁰ но, вообще говоря, незначительные: ошибка редко достигает 3% и уменьшается с увеличением глубин. Влияние силы Кориолиса необходимо учитывать при расчетах периодов сейш, превышающих половину маятниковых суток. Сила Кориолиса приводит к вращению плоскости колебаний уровня по часовой стрелке. Это

обстоятельство обуславливает изменение длины оси колебаний озера в различные моменты наблюдений, а следовательно, и изменение периодов сейш. В этом заключается одна из причин расхождений между вычисленными и зарегистрированными самописцами уровня периодами сейш. Они еще более увеличиваются, если озеро окружено низинами, затопляемыми при повышении уровня.

8. При сравнении результатов расчетов периодов сейш с данными наблюдений нужно иметь в виду следующее:

а) лимниграммы самописцев уровня могут носить различный характер в зависимости от места их установки. Расположенные вблизи узловой линии данной сейши самописцы не будут регистрировать эту сейшу;

б) записи самописца уровня в ряде случаев носят довольно сложный характер. Поэтому для сравнения вычисленных и наблюдаемых периодов сейш необходимо предварительно разложить кривую колебаний уровня, записанную на ленте самописца, на составляющие, а затем уже определить периоды этих сейш;

в) в отдельных бухтах и заливах могут возникнуть самостоятельные сейши, не связанные с сейшами самого озера. Периоды сейш в заливах и бухтах с широким выходом в озеро можно рассчитывать по формуле

$$T_1 = \frac{4L}{\sqrt{gh}} \text{ сек.}$$

9. При выборе мест для устройства водомерных постов, в особенности для установки самописцев уровня, необходимо предварительно исследовать возможные сейши на данном водоеме и определить положение узловых линий (при помощи теоретических методов или на модели). Выбор мест для устройства водомерных постов и установки самописцев уровня необходимо производить с учетом положения узловых линий.

10. Наиболее простым и в то же время надежным и дешевым методом исследования сейш является изучение их на модели. При таких исследованиях, как показал опыт, полезно покрывать дно и склоны модели озера тонким слоем материала, обладающего наименьшей шероховатостью, например пластилином. Это ослабляет трение, уменьшает логарифмический декремент затухания и делает более надежным определение периодов сейш, возбужденных на модели.

¹⁰ За исключением случая, описанного в п. 6 Заключения, когда расчеты вообще дают неверные результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Андреев. Ладожское озеро. Спб., 1875.
2. Л. С. Берг. Озеро Иссык-Куль. Землеведение, кн. 1—2. М., 1904.
3. Л. С. Берг. Аральское море. Опыт физико-географической монографии. Изв. Турк. отд. РГО, т. V. Ташкент, 1908.
4. Л. С. Берг. О внутренних волнах и связанных с ними колебаниях температуры на глубинах морей и озер. Землеведение, т. XVII. М., 1910.
5. Л. С. Берг. Гидрологические исследования на оз. Иссык-Куль в 1928 г. Изв. ГГИ, № 28. Л., 1930.
6. В. И. Верболов. Влияние внутренних волн и сгонно-нагонных явлений на распределение температуры воды в озере Байкал. Тр. III Всесоюзного гидрологического съезда, т. IV. Л., Гидрометеиздат, 1959.
7. Л. К. Давыдов. Приближенный метод расчета сейш. Вестник ЛГУ, 1958, № 24.
8. Л. К. Давыдов. О формуле Мериана. Вестник ЛГУ, 1960, № 18.
9. Б. Б. Девисон. К теории метода Кристалла исследования сейшеобразных колебаний. Зап. ГГИ, т. VI. Л., 1932.
10. Б. Б. Девисон. Сейшеобразные колебания в водоемах неправильной формы. Прикладная математика и механика. Новая серия, т. II, вып. I. М., Изд. АН СССР, 1936.
11. Б. Б. Девисон и С. А. Христианович. О некоторых проблемах теоретической гидрологии. Успехи математических наук, вып. II. Л., 1937.
12. Б. Л. Дзердзеевский. Некоторые данные о температуре воды в Байкале. Геофизика, т. 2, вып. 1/13. Л., 1932.
13. П. Ф. Домрачев. Материалы к физико-географической характеристике озера Балхаш. Исслед. озер СССР, вып. 4. Л., Изд. ГГИ, 1933.
14. П. Ф. Домрачев. Балхаш и Прибалхашье. Алма-Ата, 1935.
15. В. П. Дубов. Сейши Балтийского моря и связь их с наводнениями в Ленинграде. Тр. ГГИ, вып. 5. Л.—М., 1937.
16. В. П. Дубов. Исследование на модели сейш Аральского моря. Научн. зап. Моск. инст. инж. водн. хоз., т. XX, 1958.
17. Б. Д. Зайков. Гидрологический очерк бассейна оз. Севан. Матер. по исслед. оз. Севан и его бассейна. Ч. I, вып. 3. Л., 1933.
18. Б. Д. Зайков и С. Ю. Беленков. Гидрометрические исследования в бассейне оз. Севан в 1926—1930 гг. Матер. по исслед. оз. Севан и его бассейна. Ч. I, вып. 2. Л., 1932.
19. Н. Н. Зубов. Динамическая океанология. Л., Гидрометеиздат, 1947.

20. И. М. Иванов, М. С. Куфтырева. Озера СССР. Уч. зап. Моск. обл. пед. инст., т. 17, вып. 5. М., 1951.
21. А. В. Караушев. Сгонно-нагонные явления на водохранилищах и озерах. Л., Гидрометеиздат, 1960.
22. Н. А. Кейзер. Материалы для гидрологии Иссык-Куля. Л., Изв. ГГИ, № 22, 1928.
23. П. А. Киткин. Ветровые колебания уровня мелководного замкнутого бассейна. Тр. Гос. океанограф. инст., вып. 2 (14). М.—Л., 1947.
24. Н. Г. Конкина. О гидрологическом значении сейш. Вестник ЛГУ, 1962, № 12.
25. Н. Е. Кочин, И. Л. Кибель, Н. В. Розе. Теоретическая гидромеханика. Изд. 5-е. М., ГИТТЛ, 1955.
26. Т. П. Кравец. Движение сейш озера Байкал по р. Ангаре. Тр. Байкальской лимнол. ст. Иркутск, 1960.
27. Т. П. Кравец и В. Н. Соловьев. Метод моделей и его применение к изучению сейш оз. Байкал. Тр. Иркутск. магн. и метеорол. observ., № 1. Иркутск, 1926.
28. Т. И. Малинина. О сейшах Якимварского залива подо льдом. Изв. ВГО, т. 91, вып. 2. Л., 1959.
29. Т. И. Малинина. Одноузловая сейша Якимварского залива Ладожского озера. Изв. ВГО, т. 92, вып. 3. Л., 1960.
30. Т. И. Малинина. О сейшах Якимварского залива. Сб. «Комплексные исследования шхерной части Ладожского озера». Л., Изд. АН СССР, 1961.
31. В. М. Маккавеев. О внутренних волнах большой длины и о внутренних сейшах. Уч. зап. ЛГУ № 50, сер. геогр. наук. Л., 1940.
32. Е. С. Марков. Озеро Гокча. Географическое описание озера. Ч. I. География физическая. Спб. 1911.
33. Н. А. Масевич. Белое озеро. Сб. «Рыболовство на Белом и Кубенском озерах». Вологда, 1955.
34. В. П. Матвеев. Данные по распределению кислорода и хлора в озере Иссык-Куль. Изв. ГГИ, № 34. Л., 1929.
35. В. П. Матвеев. О солености озера Иссык-Куль. Зап. ГГИ, т. VI. Л., 1932.
36. В. П. Матвеев. Гидрологические исследования на озере Иссык-Куль в 1932 г. Тр. Кирг. компл. эксп. АН СССР, т. 3, вып. 2. Л., Изд. АН СССР, 1935.
37. Н. Г. Николаев. Ветры в бассейне озера Севан. Матер. по исслед. оз. Севан и его басс., ч. III, вып. 6. Л., 1934.
38. Н. Г. Николаев. Предварительные данные о климате долины Телецкого озера. Исслед. озер СССР, вып. 7. Л., Изд. ГГИ, 1934.
39. В. Н. Оболенский. Сейши и их теория. Зап. по гидрографии, т. 43, вып. 2. Л., Изд. Главн. гидрограф. управл., 1919.
40. П. П. Пиварелис. Уровень Телецкого озера в связи с балансом стока. Исслед. озер СССР, вып. 7. Л., Изд. ГГИ, 1934.
41. Б. А. Помяткин. К вопросу о сгонно-нагонных колебаниях уровня оз. Байкал. Тр. Байкальской лимнол. ст., т. XVIII. М.—Л., Изд. АН СССР, 1960.
42. Дж. Праудмэн. Динамическая океанология. М., ИЛ, 1957.
43. М. В. Ремезова. Сейши Аральского моря. Тр. ГГИ, вып. 5. Л., Гидрометеиздат, 1937.
44. М. В. Ремезова. Некоторые морфометрические величины Телецкого озера. Исследования озер СССР, вып. 7. Л., Изд. ГГИ, 1934.
45. Л. Л. Россоломо. Температурный режим озера Байкал. Тр. Байкальской лимнол. ст., т. XVI. М., Изд. АН СССР, 1957.
46. А. А. Саткевич. Основные методы анализа эмпирических кривых периодического типа. Зап. ГГИ, т. 2. Л., 1926.
47. В. Н. Соловьев. Метод моделей и его применение к изучению сейш оз. Байкал. Изв. Биолого-географ. научно-исслед. инст. при Иркутском гос. университете, т. II. Иркутск, 1925.

48. В. Н. Соловьев и В. Б. Шостакович. Сейши озера Байкал. Тр. Иркутск. магн. и метеорол. обсерв., № 1. Иркутск, 1926.
49. Л. Н. Сретенский. Теория волновых движений жидкости. М.—Л., ОНТИ, НКТП СССР, 1936.
50. Дж. Стокер. Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.—Л., ИЛ, 1959.
51. М. Н. Тарасов. Гидрохимия озера Балхаш. М., Изд. АН СССР, 1961.
52. А. И. Тихомиров. Сейшевые течения в проливах Якимварского залива Ладжского озера (наблюдения 1957 г.). ДАН СССР, т. 121. М., 1958.
53. Э. А. Чистова. Таблицы функций Бесселя от действительного аргумента и интегралов от них. М., Изд. АН СССР, 1953.
54. В. Б. Шостакович. Термический режим Байкала. Тр. Иркутск. магн. и метеорол. обсерв., № 1. Иркутск, 1926.
55. Т. Ф. Эйпре. Опыт работы гидрометеорологической станции Тайрыкой. «Метеорология и гидрология», 1957, № 12.
56. Г. Р. Юнусов. Гидрологический режим озера Балхаш. Тр. III Всесоюзного гидрологического съезда, т. IV. Л., Гидрометеиздат, 1957.
57. R. A. Bryson and P. M. Kuhn. On certain oscillatory motions of lakes. Report to the University of Wisconsin Lake Investigations Committee, No 5, 1952.
58. G. Chrystal. On the hydrodynamical theory of seiches. Trans. roy. soc. Edinb., vol. 41, 1905.
59. A. Defant. Über die stehenden Seespiegelschwankungen (Seiches) in Riva am Gardasee. S. B. Akad. Wiss. Wien, math.-nat. Kl., 117. Abt. Ia, 1908.
60. A. Defant. Neue Methode zur Ermittlung der Eigenschwingungen (Seiches) von abgeschlossenen Wassermassen (Seen, Buchten usw.). Ann. Hydr. u. mar. Met. 46. Berl., 1918.
61. A. Defant. Physical Oceanographie. N. Y.—Oxf.—L.—P., 1961.
62. F. Defant. Theorie der Seiches des Michiganses und ihre Abwandlung durch Wirkung der Korioliskraft. Arch. Met. Geophys. Biokl. A., Bd. 6, H. 2. Wien, 1953.
63. P. Du Boys. Essai théorique sur les seiches. Arch. sci. phys. nat., ser. 3, 25. Geneve, 1891.
64. H. Ertel. Eine neue Methode zur Berechnung der Eigenschwingungen von Wassermassen in Seen unregelmässiger Gestalt. Sitz. Ber. Preuss. Akad. d. Wiss., phys.-math. Kl., 24. Berlin, 1933.
65. G. R. Fisch. A Seiche movement and its effect on the hydrology of Lake Victoria. L., 1957.
66. F. A. Forel. Le Léman: monographie limnologique. T. 2. Lausanne, 1895.
67. W. Halbfass. Die Seen der Erde, 1922.
68. A. J. Henry. Wind velocity and fluctuations of water level of Lake Erie. Bull. U. S. weath. bur. Washing., 1902.
69. Jino Heia. Laatokaan uninodaalinen seicheheiladus. Terra NI. Helsinki, 1945.
70. K. Hidaka. Application of Ritz's variation method to the determination of seiches in a lake. Mem. imp. mar. obs. 6, Tl. 2. Tokio, 1926.
71. G. E. Hutchinson. A Treatise on limnology. Vol. I. N. Y.—L., 1957.
72. K. Honda, T. Terada, V. Voshida and D. Isitani. Secondary undulations of oceanic tides. J. coll. sci. Tokyo, 24. 1909.
73. F. H. Kreckler. Vertical oscillations or seiches in lakes as a factor in the aquatic environment. Ecology, 12, 1931.
74. W. M. Makkaweev. Bemerkungen über die Theorie der langen internen Wellen. V. Hydrologische Konferenz der Baltischen Staaten. Helsinki, June, 1936.
75. J. R. Merian. Über die Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen. Basle, 1828.

76. C. H. Mortimer. The resonant response of stratified lakes to wind. Schweiz. Zs. Hydrol., vol. 15, 1953.
77. G. Neumann. Die Impedanz mechanischer Schwingungssysteme und ihre Anwendung auf die Theorie des Seiches. Ann. Hydrol. und Mar. Meteor., 1944.
78. A. Nöschel. Bemerkungen über den Goktscha-see am Kaukasus, in geognostischer, hydrographischer und meteorologischer Beziehung. Verhandlungen der Russ. K. Min. Ges. zu St. Petersburg, 1854.
79. G. A. Pezzoli. Oscillazioni libere del lagodi Pieve di Cadore. Arch. ocean. e limnol., 10, N 1—2, 1955.
80. A. E. Porsild. Notes on seiches and currents in Great Bear Lake. The geographical review. Vol. XXII, No 3, July, 1932.
81. J. Proudman. Free and forced longitudinal tidal motion in a lake. Proc. Lond. math. soc. 2nd, 1915.
82. M. Stabrowski. (Extrait). Du phenomene des seiches: observations faites durant un séjour de sept années près du Lac. Oneiga. Compt. rend., XLV. Paris, 1857.
83. R. Sterneek. Die Gezeiten Erscheinungen in der Adria. Tl. 2. Denkschr. d. Wiener Akad., 1919.
84. E. R. Watson. Movements of the waters of Loch Ness, as indicated by temperature observations Geogr. j., 24. L., 1904.
85. E. M. Wedderburn. The temperature seiche. Trans. roy. soc. Edinb. Vol. XLVII, pt. IV, 1911.